

# **UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS**

**Departamento de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica I (Geofísica  
y Meteorología) (Astronomía y Geodesia)**



## **TESIS DOCTORAL**

**Estudio de la intermitencia de la turbulencia en la capa límite  
atmosférica y aplicación a los mercados financieros**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

José María Vindel López

Director

Carlos Yagüe Anguís

**Madrid, 2013**



# **ESTUDIO DE LA INTERMITENCIA DE LA TURBULENCIA EN LA CAPA LÍMITE ATMOSFÉRICA Y APLICACIÓN A LOS MERCADOS FINANCIEROS**

Tesis Doctoral presentada por:

**Jose María Vindel López**

Director: **Carlos Yagüe Anguís**

Departamento de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica I  
(Geofísica y Meteorología)

Facultad de Ciencias Físicas  
Universidad Complutense de Madrid  
Diciembre 2012



# **Agradecimientos**

En primer lugar, deseo hacer constar mi enorme gratitud al director de esta tesis, Carlos Yagüe Anguís, junto al cual he elaborado buena parte de los artículos publicados fruto de este trabajo. Sin él, hubiera sido imposible terminar, y seguramente empezar, este proyecto en el que me he embarcado durante años. Sus investigaciones, sus sugerencias y constante dedicación lo han hecho posible. Agradezco también al Departamento de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica I (Geofísica y Meteorología) de la Universidad Complutense de Madrid haber acogido mi tesis y haberme dado todas las facilidades para realizarla.

Asimismo, doy mis más sinceros agradecimientos a los evaluadores anónimos de los artículos enviados y publicados en distintas revistas científicas. Aunque sus identidades me sean desconocidas por el sistema ciego de revisión, sus comentarios me han dado luz y me han ayudado a dar forma al trabajo completo que ahora presento para su valoración. Mi reconocimiento también a los proyectos de investigación que me han permitido financiar este trabajo: *“Mejora de la capacidad de observación de la capa límite atmosférica en relación con el transporte de componentes atmosféricos de importancia”* (Referencia: CGL2006-12474-C03-03/CLI); *“Micrometeorología y Variabilidad Climática”* (Referencia: Convocatoria GR58/08-A); *“Estudio de los procesos físicos relevantes en la transición de la capa límite atmosférica nocturna”* (Referencia: CGL2009-12797-C03-03).

Por último, querría dedicar esta tesis a mis padres, que siempre estuvieron a mi lado y me dieron el cariño y apoyo necesarios para seguir adelante. Su recuerdo estará siempre en mi corazón. Ellos se fueron durante la elaboración de la misma dejando un vacío irreparable; entretanto, mi hijo Marcos llegaba, llenando mi vida de alegría, con sus juegos y sonrisa. Finalmente, esta tesis no hubiera sido posible sin la colaboración de mi mujer, Estrella. Gracias, cariño, por tu compañía y comprensión.



# INDICE

	<b>Página</b>
<b>1. Introducción y objetivos</b>	<b>1</b>
<b>2. Aspectos fundamentales de la turbulencia</b>	<b>9</b>
2.1. Régimen laminar y turbulento	10
2.2. Características de la turbulencia	10
2.3. Cascada de Richardson	11
2.4. Escalas de la turbulencia	15
2.5. Turbulencia 2D vs. 3D	20
2.6. Turbulencia en la CLA	25
2.7. Geometría fractal	26
2.7.1. Autosemejanza o autosimilitud	26
2.7.2. Dimensión fractal y espectro multifractal	30
<b>3. Intermitencia de la turbulencia</b>	<b>33</b>
3.1. Concepto de intermitencia	34
3.2. Análisis de la intermitencia	35
3.2.1. Funciones de estructura	35
3.2.2. Funciones de densidad de probabilidad	42
3.2.3. Curtosis	42
3.3. Modelos de intermitencia	43
3.3.1. Turbulencia homogénea	45
3.3.1.1. Teoría K41 o de Kolmogorov	46
3.3.1.2. Teoría K62 o Modelo lognormal	49
3.3.1.3. Modelo $\beta$	53
3.3.1.4. Modelo de She-Lévêque	54
3.3.1.5. Modelo $p$ o Modelo binomial	56
3.3.1.6. Modelo de difusión	59
3.3.2. Turbulencia no homogénea	66
3.3.2.1. Modelos <i>shell</i>	66
3.3.2.2. Modelo log-Poisson (con condición ESS)	82

<b>4. Estudio de la cascada energética y la intermitencia de la turbulencia en la capa límite atmosférica</b>	<b>89</b>
4.1. Emplazamiento de la campaña SABLES98	90
4.2. Instrumentación	92
4.3. Datos empleados	93
4.4. Evolución del Número de Reynolds con la escala	95
4.5. Tiempo de vida de los remolinos	98
4.6. Intermitencia de las situaciones estudiadas	100
4.6.1. Funciones de estructura	100
4.6.2. Funciones de densidad de probabilidad	104
4.6.3. Curtosis	108
4.7 Evolución diaria de la intermitencia (Influencia de la estratificación térmica y el viento sobre la intermitencia)	110
4.8. Pendientes espectrales	126
4.9. Parámetros de estabilidad	128
4.10. Modelos de intermitencia	129
<b>5. Intermitencia en otros ámbitos (mercados financieros)</b>	<b>137</b>
5.1. Turbulencia en los mercados financieros	138
5.2. Intermitencia y comportamiento anómalo	139
5.3. Racionalidad de los datos financieros vs. comportamiento en la naturaleza	152
<b>6. Resumen y Conclusiones</b>	<b>155</b>
<b>Referencias</b>	<b>167</b>
<b>Apéndices</b>	<b>179</b>
Apéndice I (Distribuciones de Lévy)	180
Apéndice II (Método de Blackman & Tukey)	182
Apéndice III (Análisis en cascada multiplicativa)	184
Apéndice IV (Dimensión fractal en el modelo K62)	187
Apéndice V (Ecuación de Navier-Stokes en el espacio de Fourier)	188
Apéndice VI (Convergencia estadística)	190
Apéndice VII (Notación empleada)	195
Apéndice VIII (Listado de artículos publicados o en revisión)	199

# **1. Introducción y objetivos**



El principal objetivo de esta tesis doctoral es abordar el estudio del fenómeno de la intermitencia de la turbulencia dentro de la llamada capa límite planetaria o atmosférica (CLA). Esta capa es la región de la troposfera influida directamente por la presencia de la superficie terrestre, y que responde a los forzamientos superficiales en una escala temporal de una hora o menos (Stull 1988). No se quiere decir que en ese tiempo la capa alcance un equilibrio, sino que en ese tiempo comienzan las alteraciones en respuesta a esos forzamientos (flujos de calor, fricción, evaporación y transpiración, emisión de contaminantes y modificación del flujo inducida por el terreno). Se trata, por tanto, de la región donde las interacciones entre atmósfera y tierra presentan una mayor intensidad, fundamentalmente en forma de flujos de calor, momento y masa. La estructura o régimen de esta capa se caracteriza por la existencia o no de mezcla, la cual depende de la estratificación térmica (estabilidad, neutralidad o inestabilidad) presente en la CLA y del viento.

Respecto a la primera magnitud, la estratificación térmica, ésta varía de forma fundamental a lo largo del día. En efecto, durante el día el calentamiento superficial induce situaciones de mayor inestabilidad, en las que los movimientos verticales se ven favorecidos; por el contrario, el enfriamiento nocturno genera situaciones más estables, que inhiben esos movimientos verticales. Respecto a la segunda magnitud que influye de forma fundamental en la estructura de la CLA, el viento, se puede definir como un flujo de aire que transporta diversas magnitudes, como humedad, calor, momento o contaminantes. Este flujo se puede dividir en tres categorías (Stull 1988) que pueden existir independientemente unas de las otras o que pueden coexistir en la CLA:

- a) Viento medio: Es el principal responsable del transporte horizontal. Valores comunes de la componente horizontal del viento en la capa límite atmosférica (CLA) son: 2-10 m/s; de la componente vertical: mm o cm/s. Hay que tener en cuenta que cerca del suelo su valor disminuye por la fricción.
- b) Ondas: Resultan efectivas transportando momento y energía. Existen dos tipos fundamentales:

## Introducción y objetivos

---

- *Ondas internas o de gravedad*: Se deben a procesos que provocan el desplazamiento del aire de su nivel de equilibrio de estratificación estable, como pueden ser obstáculos topográficos a superar, eventos turbulentos, tormentas, sistemas frontales, circulaciones de brisa marina...
- *Inestabilidades de Kelvin-Helmholtz*: Producidas por la cizalladura del viento medio actuando sobre interfases estables de diferente densidad.

Las ondas pueden, o bien dispersarse, o bien amplificarse y acabar rompiendo provocando la tercera categoría del flujo: la turbulencia.

- c) Turbulencia: Es la principal responsable del transporte vertical. Consiste en remolinos o vórtices (*eddies* en inglés) irregulares en movimiento.

Fuera de la CLA, la turbulencia se encuentra en las nubes convectivas o cerca de la corriente del chorro, donde se produce fuerte cizalla (turbulencia en aire claro).

En la CLA, la turbulencia es producida por:

- *Forzamientos superficiales*: como el calentamiento solar sobre el suelo que causa térmicas de aire caliente ascendente (esas térmicas son los remolinos turbulentos); la fricción sobre el suelo que da lugar a cizalladura; los obstáculos a superar por el flujo...
- *Ondas*: El mecanismo que genera turbulencia relacionado con las ondas es la ruptura de las mismas.
- *Chorros de capa baja o Low-Level Jets (LLJs)*: Se producen habitualmente entre 60 y 300 m sobre el nivel del suelo por diversos motivos, como pueden ser la oscilación inercial del viento al caer la noche, el enfriamiento superficial sobre pendientes que genera corrientes de gravedad, o la baroclinicidad en terreno con pendiente. La presencia de estos *LLJs* suele producir cizalladura, que da lugar a la turbulencia.
- *Corrientes de gravedad o flujos catabáticos*: En estos casos, nuevamente se puede generar cizalladura del viento.

De acuerdo con la estratificación térmica y el viento, podemos distinguir los siguientes regímenes de la CLA:

- C.L. Convectiva o Mezclada: Es típica de horas diurnas con buen tiempo, con o sin viento. Es producida por forzamientos superficiales, la turbulencia es continua e intensa, y las distintas magnitudes alcanzan un nivel de equilibrio. Es aplicable el análisis de series temporales por métodos convencionales (descomposición de Reynolds de las variables en una componente media y otra perturbada).
- C.L. Estable: Típica de noches despejadas con viento débil, aunque también se puede producir en horas diurnas por advección de aire cálido sobre superficie fría. Se produce un desacoplamiento entre los forzamientos superficiales y la parte superior de la capa (*z-less turbulence* y *local scaling*), y la altura sobre la superficie, así como los flujos superficiales no son determinantes de la turbulencia en alturas relativamente cercanas a la superficie. La turbulencia es discontinua y poco intensa, y las distintas magnitudes no alcanzan un nivel de equilibrio (evolucionan continuamente). Pueden desarrollarse diversos fenómenos: chorros de capa baja, corrientes de gravedad, ondas internas, inestabilidades de Kelvin-Helmholtz. En este caso, el análisis por métodos estadísticos convencionales no siempre da buenos resultados, siendo mejores otros métodos estadísticos como la Transformada Wavelet (Viana 2011).
- C.L. Neutral o Indiferente: Típica de horas diurnas con viento y nubosidad en altura, que inhibe la convección, o de noche con vientos moderados, así como en las transiciones vespertinas y matinales de la CLA.

Dado que la CLA es una capa turbulenta, para analizar adecuadamente su estructura se requerirá conocer detalladamente la estructura y amplitud de los remolinos turbulentos, responsables del transporte vertical del momento lineal. Sin embargo, las características de la turbulencia hacen de ella un tema complejo al que la comunidad científica ha dedicado enormes esfuerzos a lo largo de los años y al que, seguramente, se continuarán dedicando. De hecho, al introducir el tema de la turbulencia, la mayoría de manuales de física ya nos advierten que nos encontramos

## Introducción y objetivos

---

ante el único gran asunto abordado por la física clásica que queda por resolver. Esa complejidad procede, entre otras cosas, de la irregularidad o aleatoriedad que afecta a las variables cuando se encuentran en un flujo turbulento, y que hace que sea necesario posicionarse ante su estudio en términos estadísticos.

Han sido varios los hitos en la historia de la física en el intento por comprender el fenómeno de la turbulencia. Habría que destacar en primer lugar la teoría desarrollada por Richardson (1922), según la cual la turbulencia consiste en un conjunto de vórtices o remolinos generados (inicialmente por la convección térmica y la cizalladura del flujo medio, Arya 2001), los cuales desaparecen al ceder su energía a remolinos de menor tamaño generados a partir de los primeros, proceso que se repite hasta que los remolinos ya tienen un tamaño tan pequeño que desaparecen al disiparse su energía por viscosidad en forma de calor (la llamada cascada de Richardson). Esta cascada se compone por tanto, de un conjunto de escalas o pasos de cascada y, en cada uno de esos pasos, variables como la velocidad se comportan como una variable aleatoria. Al considerar el conjunto de pasos, tendremos para esa velocidad, un conjunto de variables aleatorias, es decir, la velocidad se comportará como un proceso estocástico.

Otra teoría fundamental fue llevada a cabo por Kolmogorov (1941) mediante el análisis dimensional. Kolmogorov supuso que (en condiciones de homogeneidad, isotropía y localidad), en las escalas pequeñas, pero donde la viscosidad  $\nu$  no es importante todavía, la distribución de probabilidad de la velocidad tan sólo dependía del valor medio de la tasa de transferencia de energía entre remolinos. Esa consideración le llevó a obtener una relación lineal entre las llamadas funciones de estructura de un determinado orden de la variable (que representan los momentos de ese orden de la distribución de probabilidad de la variable aleatoria) y el orden correspondiente. Esta ley parecía ser capaz de establecer la distribución de probabilidad de la velocidad a lo largo de la cascada de Richardson, es decir, parecía haberse encontrado un comportamiento universal por parte de los remolinos a lo largo de la cascada. Sin embargo, poco más tarde, se observó que la turbulencia no siempre se comportaba de esta manera, y al alejamiento del comportamiento de los remolinos respecto de la teoría de Kolmogorov se denominó intermitencia. La intermitencia vino a ser, pues, un elemento molesto en la explicación de la

## Introducción y objetivos

---

turbulencia y, este incómodo fenómeno será, precisamente, el objeto de estudio de la presente tesis.

Por otro lado, los estudios empíricos sobre turbulencia acostumbran a servirse mayoritariamente de datos obtenidos en un laboratorio, donde pueden controlarse mejor las condiciones de trabajo y donde no existen tantas dificultades para realizar mediciones como las que se presentan en las campañas para tomar medidas en la atmósfera. Por ello, resultan menos frecuentes los estudios de turbulencia a partir de datos tomados directamente de la atmósfera y, aún menos habitual, el estudio de la intermitencia que presenta la turbulencia en la atmósfera.

Todo ello justifica el interés para la realización de esta tesis doctoral. En ella pondremos de manifiesto la intermitencia existente en la turbulencia atmosférica y cómo es la dependencia de la misma con el tipo de estratificación presente en la atmósfera e, incluso, con el viento presente. También aplicaremos a nuestros datos atmosféricos algunos de los modelos más significativos en el estudio de la intermitencia para ver su grado de bondad. Llegados a este punto, veremos que los modelos existentes, desarrollados únicamente para explicar la turbulencia totalmente desarrollada, resultan insuficientes en el caso de la turbulencia sin ese desarrollo. Este último tipo de turbulencia, en ocasiones presente en la CLA, será analizado con bastante detenimiento en el trabajo, ya que lo hemos encontrado prácticamente inexistente en la bibliografía. Además, en la parte final de la tesis aplicaremos la metodología seguida para el estudio de la intermitencia en la atmósfera al ámbito financiero, pues se ha comprobado que el comportamiento de los datos bursátiles presenta importantes analogías con el de las velocidades en los fluidos, por lo que este tipo de análisis ha experimentado un importante desarrollo en las más importantes revistas científicas del ámbito de la física en los últimos años.

Para llevar a cabo todos estos estudios, la tesis se ha estructurado de la siguiente manera: un primer bloque se dedica fundamentalmente a explicar la teoría de todo aquello que pueda resultar de interés para comprender mejor el tema, aunque también se incluyen algunos resultados obtenidos a partir de los datos tratados, y que puedan resultar clarificadores. En ese sentido, estudiaremos en primer lugar el fenómeno que, en un marco más amplio, es objeto de la tesis: la turbulencia. En el capítulo

dedicado a la misma (capítulo 2) se verán algunos de sus aspectos más significativos (como la mencionada teoría de Kolmogorov), aunque dedicaremos especial atención a la cascada de Richardson, pues ésta va a ser el elemento clave en todas nuestras consideraciones posteriores. En efecto, la transición entre distintas escalas, es decir, la transición a lo largo del espectro, es, a fin de cuentas, el eje central de esta tesis. Sin abandonar el capítulo dedicado a la turbulencia, incluimos un repaso a la geometría fractal. Este estudio resulta especialmente pertinente pues, como también veremos a lo largo de la tesis, la velocidad a lo largo de la cascada se comportará también como un proceso autosemejante, es decir, como un proceso con geometría fractal (más concretamente, con geometría multifractal, multifractalidad que se corresponderá, precisamente, con el fenómeno de la intermitencia).

Una vez tratados los aspectos generales de la turbulencia, estaremos en condiciones de abordar el estudio del concepto de intermitencia de la turbulencia (capítulo 3), estudio que se puede plantear desde dos puntos de vista, que por otra parte, resultan complementarios: a través de un análisis multifractal o a través del llamado análisis en cascada multiplicativa. Llegados a este punto, mostraremos algunos de los modelos de intermitencia más significativos, algunos de los cuales, posteriormente, serán aplicados a nuestros datos (Vindel *et al.* 2008b). De especial relevancia resulta el estudio realizado para los modelos *shell* (Vindel & Yagüe 2009) pues ya se plantean unas conclusiones que, posteriormente, se verán refrendadas por los resultados empíricos obtenidos.

A continuación, en un segundo bloque se aborda el análisis de los datos atmosféricos correspondientes a la campaña atmosférica SABLES98, llevada a cabo en el año 1998 en las instalaciones del Centro de Investigación para la Baja Atmósfera (CIBA) sito en la provincia de Valladolid. En ese estudio se establecen importantes conclusiones, tales como la clara dependencia entre el tipo de estratificación existente y el grado de intermitencia (Vindel *et al.* 2008a). También mostraremos la existencia de un comportamiento no documentado hasta ahora en la bibliografía (Vindel & Yagüe 2011) referente a la posibilidad de que la tasa de energía disipada disminuya, en lugar de aumentar, al descender por la cascada, en situaciones de fuerte estabilidad de estratificación. En la tesis plantearemos que este comportamiento sólo es posible por la ausencia de un total desarrollo de la

## Introducción y objetivos

---

turbulencia en ese tipo de situaciones, debido a que algunas ondas internas puedan quedar atrapadas, generándose “reventones” turbulentos que redistribuyen la energía a lo largo de la cascada.

Finalmente, y como hemos mencionado anteriormente, en un tercer y último bloque analizaremos, con la misma metodología aplicada al estudio de los datos atmosféricos, algunos de los más importantes mercados financieros mundiales, extrayendo analogías entre las turbulencias correspondientes a ambos tipos de datos (Vindel & Trincado 2010). En efecto, el flujo de energía a través de la cascada, propio de la dinámica de fluidos, se corresponde con un flujo de información en el caso de los índices del mercado, y el papel de la velocidad a una cierta escala (que, como veremos, será la diferencia entre los valores de esa velocidad entre momentos que distan esa escala temporal), puede ser desempeñado por la diferencia entre los valores del índice en un par de momentos. De hecho, el comportamiento anómalo antes mencionado, correspondiente a situaciones de fuerte estabilidad, y que sólo puede ser explicado a través de la ausencia de un total desarrollo de la turbulencia, también aparece en aquellos índices financieros con una libertad más restringida (Trincado & Vindel 2012a). Este es el caso del *DOW JONES*, índice construido únicamente a partir de los precios de los artículos, sin posibilidad de considerar la cantidad existente de los mismos. Pero además, sirviéndonos de la posibilidad de interpretar los mercados financieros como una cascada de información entre vórtices turbulentos, pondremos de manifiesto la racionalidad que debe estar presente, de alguna manera, en los datos financieros.

## **2. Aspectos fundamentales de la turbulencia**



## **2.1. Régimen laminar y turbulento**

En el movimiento de los fluidos se distinguen dos tipos de regímenes: laminar y turbulento (Tennekes & Lumley 1972). En el primero, el fluido es como si se desplazara a través de capas paralelas entre sí que no se mezclan. En el segundo, por el contrario, el movimiento del fluido ya no tiene lugar a través de láminas paralelas, sino que se produce de forma irregular generándose remolinos o vórtices. El parámetro que sirve para clasificar un flujo como de un tipo u otro es el llamado Número de Reynolds ( $Re$ ).  $Re$  se trata de un valor adimensional que se define como:

$$Re = \frac{ul}{\nu} \quad (2.1)$$

siendo  $u$  la velocidad,  $l$  una longitud característica del fenómeno (en la atmósfera se corresponde con la altura) y  $\nu$  la viscosidad cinemática.

$Re$  mide, en definitiva, la relación entre las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas que gobiernan el movimiento de los fluidos.

Sirve por tanto para caracterizar el régimen, turbulento o no de un fluido, pues a la vista de su definición, cuando las fuerzas viscosas tienen un efecto dominante en la pérdida de energía, el número de Reynolds es pequeño y el flujo se encuentra en el régimen laminar. Un número de Reynolds alto indicará que las fuerzas viscosas influyen poco en la pérdida de energía y, por tanto, que el flujo es turbulento.

## **2.2. Características de la turbulencia**

### *La irregularidad o aleatoriedad*

Las distintas variables fluidodinámicas (velocidad, temperatura, presión, etc) varían en el espacio y en el tiempo de forma aleatoria. El flujo no resulta ni homogéneo ni estacionario. De ahí la necesidad de acudir al análisis estadístico para el estudio de la turbulencia (Lesieur 1997).

### Amplio espectro de escalas

El tamaño de las escalas que caracterizan la turbulencia resulta muy variable, extendiéndose desde la llamada escala integral (en la atmósfera del orden de decenas o centenares de metros) hasta la escala de Kolmogorov (del orden de mm).

### La difusividad o efectividad de mezcla

Cada *eddy* transporta momento y energía desde el nivel en que se genera hasta otro nivel, donde produce una fluctuación del movimiento turbulento. El remolino desaparece entonces absorbido por el aire ambiente. Se trata de un proceso que presenta ciertas analogías con el que tiene lugar a nivel molecular y en el que se basa la teoría de longitud de mezcla de Prandtl.

### La tridimensionalidad

En experimentos llevados a cabo en laboratorio se pueden conseguir flujos estrictamente turbulentos 2D. Sin embargo, en la naturaleza la turbulencia siempre es en tres dimensiones y, sobre todo, en las escalas más pequeñas del espectro, que son las predominantes en la CLA. Sin embargo, en condiciones de fuerte estabilidad de estratificación en la atmósfera, la inhibición del movimiento vertical genera una turbulencia muy similar a la 2D.

### La disipación

Como veremos posteriormente, a lo largo de la llamada cascada de Richardson los remolinos van perdiendo energía por acción de las tensiones viscosas. Por ello, para mantenerse la turbulencia se necesita de un aporte continuo de energía procedente del flujo principal.

## **2.3. Cascada de Richardson**

Como ya hemos indicado, la turbulencia se caracteriza por la existencia de un conjunto de remolinos de distintos tamaños. En 1922, Richardson supuso que los mayores, con un tamaño del orden de la escala característica del flujo principal, interaccionan con éste y extraen energía del mismo. Esos remolinos presentan un

## Aspectos fundamentales de la turbulencia

---

elevado número de Reynolds, por lo que resultan inestables y tienden a fragmentarse dando lugar a otros menores a los que transfieren su energía. Sin embargo, en ese proceso de generación y disipación, no toda la energía de los remolinos padre se transfiere a los hijos, sino que una pequeña parte de energía se disipa en forma de calor debido a las tensiones viscosas existentes en el fluido. Los nuevos remolinos generados, con un número de Reynolds todavía elevado, también resultan inestables, por lo que sufren el proceso anterior dando lugar a la aparición de nuevos remolinos a costa de los antiguos, perdiéndose nuevamente energía en el camino debido a la viscosidad. El proceso se reitera sucesivamente hasta que los remolinos generados presentan un número de Reynolds lo suficientemente bajo como para ya no resultar inestables y descomponerse, en consecuencia, en remolinos menores, es decir, hasta que el tamaño de los remolinos es tal que pierden toda su energía sólo por el efecto de las fuerzas viscosas (Pope 2000). Esos remolinos menores tan sólo se transforman en calor por efecto de las fuerzas viscosas.

Cada una de esas transiciones de remolinos mayores a menores, que podemos interpretar como cada uno de los pasos a lo largo de una cascada energética, se corresponde con una escala (espacial o temporal). La escala espacial se puede reflejar a través del tamaño de los remolinos correspondientes a ese paso. Si se supone la verificación de la hipótesis de Taylor (1938), se puede obtener una escala temporal dividiendo la escala espacial por el flujo medio.

La escala espacial  $l_n$  correspondiente al paso  $n$  de la cascada se puede determinar a partir de la escala inicial si se supone la existencia de una estructura fractal (que estudiaremos en un capítulo posterior):

$$l_n = l_0 \delta^n \quad \text{con } \delta = \delta^{-n} \quad (2.2)$$

siendo  $\delta$  el número de remolinos que se generan a partir de un remolino en cada paso (un valor habitual para  $\delta$  es 2).

Para cada una de esas escalas, o pasos de la cascada, (Arimitsu & Arimitsu 2005), podemos considerar el valor de distintas variables, como son:

- La velocidad de los remolinos ( $u_n$ )
- El número de Reynolds ( $Re_n$ )
- El tiempo necesario para la rotación de los remolinos ( $t_n^{rot}$ )
- El tiempo necesario para su disipación ( $t_n^{dis}$ )
- Tasa de energía cinética (específica) en ese paso ( $\Phi_n$ )
- La tasa de disipación de energía en ese paso ( $\varepsilon_n$ )

- *Velocidad a una cierta escala ( $u_n$ ):*

Se corresponde con la velocidad de rotación de los remolinos de tamaño  $l_n$ . Esa velocidad se entiende como la diferencia de velocidades entre dos puntos distanciados esa escala. Es decir:

$$u_n = u(x + l_n) - u(x) \quad (2.3)$$

Normalmente en las mediciones se dispone de las velocidades no en distintos puntos del espacio, sino en distintos momentos en un mismo punto. Por ello, en realidad, el valor de la velocidad se acostumbra a calcular por la diferencia de velocidades en el tiempo:

$$u_n = u(t + t_n) - u(t) \quad (2.4)$$

y, suponiendo que se verifica la hipótesis de Taylor, las escalas espacial y temporal aparecen relacionadas a través de:

$$t_n = \frac{l_n}{U} \quad (2.5)$$

siendo  $U$  el flujo medio

- *El número de Reynolds a una escala ( $Re_n$ ):*

$$Re_n = \frac{u_n l_n}{\nu} \quad (2.6)$$

Al aumentar el paso de la cascada  $n$ , disminuirá su número de Reynolds correspondiente, de tal forma que cuando ese valor sea suficientemente pequeño para una escala  $l_n$ , los remolinos resultarán estables y ya no se destruirán generando nuevos remolinos.

- *Tiempo necesario para la rotación a una escala ( $t_n^{rot}$ ):*

$$t_n^{rot} = \frac{l_n}{u_n} \quad (2.7)$$

Este tiempo se puede interpretar como el tiempo necesario para que el remolino de diámetro  $l_n$  ceda toda su energía cinética a los de diámetro  $l_{n+1}$  que se generan a partir de él. Es decir, se corresponde con el tiempo de vida del remolino.

- *Tiempo necesario para la disipación a una escala ( $t_n^{dis}$ ):*

El tiempo necesario para que la energía de un remolino se disipe en forma de calor aumentará con el tamaño del remolino y disminuirá cuanto mayor sea la viscosidad del fluido (cuanto mayor sea esa viscosidad, más rápidamente se disipará el remolino). Concretamente:

$$t_n^{dis} \propto \frac{l_n^2}{\nu} \quad (2.8)$$

Cuando  $t_n^{rot} \ll t_n^{dis}$  los remolinos tienen tiempo de ceder toda su energía a los remolinos más pequeños (el efecto disipativo es despreciable). En el caso contrario, la energía de los remolinos se disipa antes de que tengan tiempo de ceder su energía a los del paso siguiente.

- *Tasa de energía transferida a una escala ( $\Phi_n$ ):*

## Aspectos fundamentales de la turbulencia

---

Corresponde a la energía transferida por los remolinos de una escala a los de la siguiente escala por unidad de tiempo y de masa. Ese flujo se puede interpretar como la energía producida en la unidad de tiempo a la escala en cuestión:

$$\phi_n = \frac{u_n^2}{2t_n^{rot}} = \frac{u_n^3}{2l_n} \quad (2.9)$$

- Tasa de disipación de energía a una cierta escala ( $\varepsilon_n$ ):

Esa tasa será la energía cinética específica por unidad de tiempo necesario para la disipación del remolino:

$$\varepsilon_n = \frac{u_n^2}{2t_n^{dis}} \propto \nu \frac{u_n^2}{l_n^2} \quad (2.10)$$

La relación entre ambos flujos de energía vendrá dada por:

$$\frac{\phi_n}{\varepsilon_n} \propto \frac{u_n^3 l_n^{-1}}{\nu u_n^2 l_n^{-2}} = \frac{u_n l_n}{\nu} = \text{Re}_n \quad (2.11)$$

Es decir, esa relación es proporcional al número de Reynolds asociado a la escala en cuestión.

## 2.4. Escalas de la turbulencia

### Escala integral

Físicamente, la escala integral espacial equivale al tamaño de los remolinos mayores que se generan. La velocidad de esos remolinos es del orden del flujo medio.

El periodo integral corresponde al tiempo necesario para que esos remolinos realicen una rotación.

En cuanto al número de Reynolds a esa escala:

$$Re_0 = \frac{U l_0}{\nu} \quad (2.12)$$

donde  $U$  es el flujo medio y  $l_0$  la escala integral espacial.

A esa escala, el número de Reynolds es  $\gg 1$ , pues esa es la característica del régimen turbulento. En consecuencia, y dado que la relación entre las tasas de energía transferida y disipada es proporcional al número de Reynolds, la energía transferida resulta mucho mayor que la disipada, a la que se puede considerar como despreciable.

Matemáticamente, la escala integral temporal,  $t_0$ , es el periodo máximo de correlación de la serie de velocidades turbulentas consigo misma, es decir, el tiempo máximo durante el cual a esa serie le afecta lo ocurrido en el pasado. Por tanto:

$$t_0 = \int_0^\infty R(\tau) d\tau \quad (2.13)$$

donde  $R(\tau)$  es la función de autocorrelación para un desfase  $\tau$  (para un número de *lags* igual a  $\tau$ ), es decir:

$$R(\tau) = \frac{\langle u(t) u(t+\tau) \rangle}{\sigma^2} \quad (\text{siendo } \sigma^2 \text{ la varianza}) \quad (2.14)$$

El cálculo de esa integral en un rango infinito conlleva dificultades, pues tan sólo se dispone de un número finito de puntos. Por tanto, según sea el número de *lags* considerado se obtendrán resultados distintos. Por todo ello existen diversos métodos para tratar de evaluar la integral anterior, como son (Buratini *et al.* 2005):

## Aspectos fundamentales de la turbulencia

- Sustituir el límite superior de la integral por el primer cruce con cero de la función de autocorrelación. Este procedimiento presenta el inconveniente de no eliminar el ruido de dicha función.
- Sustituir ese límite por el tiempo en que la función de autocorrelación disminuye a  $1/e$ . Este método presenta el inconveniente adicional de subestimar nuestro cálculo.
- Sustituir la función de autocorrelación por una exponencial obtenida realizando un ajuste por mínimos cuadrados. El ajuste se realiza para valores de  $R(\tau)$  entre  $1/3$  y  $1$ , lo que asegura un grado de correlación elevado entre la función exponencial ajustada y la de autocorrelación.

### Escalas intermedias

Son las escalas que se encuentran por debajo de la integral y donde, todavía, los efectos viscosos no son importantes (Ballesteros 2004).

El número de Reynolds a una escala dada se puede expresar en función del número de Reynolds a escala integral a través de la siguiente relación (Hinze 1959):

$$\text{Re}_n = \text{Re}_0 \left( \frac{l_n}{l_0} \right)^{4/3} \quad (2.15)$$

Por tanto, el cociente entre la escala considerada y la escala integral marcará el orden de la relación entre las tasas de energía producida y disipada a esa escala.

A estas escalas todavía se puede considerar que su cociente con la escala integral está próximo a la unidad y, por tanto, el cociente entre energías también estará próximo al número de Reynolds a escala integral. Esto implica que la disipación de energía todavía se puede seguir considerando como despreciable. Pues bien, se denomina rango inercial al intervalo en el que la disipación de energía cinética turbulenta es prácticamente nula. Por tanto, las escalas intermedias son las correspondientes a dicho rango.



### Escala de Kolmogorov

La escala de Kolmogorov,  $\eta$ , (Kolmogorov 1941, Bakker 2006, Schmidt *et al.* 2006, Zhu *et al.* 2006) corresponde al tamaño de los remolinos para los cuales su tiempo de vida es igual al tiempo necesario para que su energía se disipe en forma de calor. Es decir, a esa escala el flujo de energía producida o transferida a los remolinos se iguala al flujo de energía disipada (los vórtices correspondientes se encuentran en equilibrio):

$$\frac{\phi_n}{\varepsilon_n} \approx 1 \Rightarrow \text{Re}_0 \left( \frac{\eta}{l_0} \right)^{4/3} \approx 1 \Rightarrow \frac{l_0}{\eta} \approx \text{Re}_0^{3/4} \quad (2.16)$$

Es decir, cuanto mayor sea el número de Reynolds asociado a la escala integral, mayor será la distancia entre la escala integral y la de Kolmogorov.

La expresión para la escala espacial de Kolmogorov resulta:

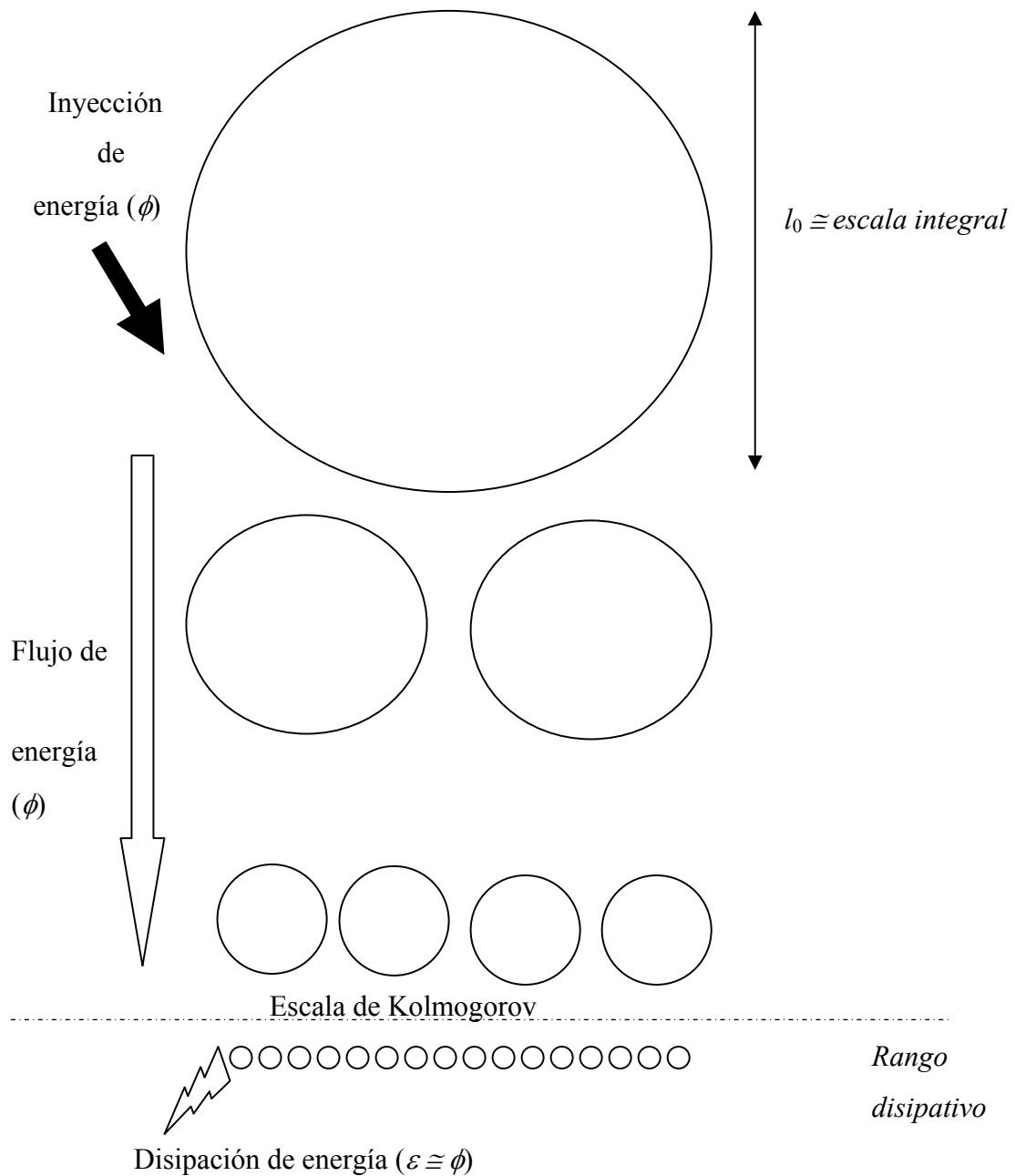
$$\eta = l_0 \left( \frac{U l_0}{\nu} \right)^{-3/4} = l_0 \left( \frac{\varepsilon_0^{1/3} l_0^{1/3} l_0}{\nu} \right)^{-3/4} = \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon_0} \right)^{1/4} \quad (2.17)$$

Por tanto, para escalas superiores a la de Kolmogorov, la energía inyectada a la escala integral se transfiere a lo largo de la cascada sin que se produzcan pérdidas apreciables por disipación (la energía se conserva a lo largo de la cascada). Llegados a la escala de Kolmogorov, el flujo de energía disipada se iguala al flujo de esa energía que se ha ido transmitiendo a lo largo de la cascada. Debido a la preponderancia de los efectos disipativos para escalas inferiores a la de Kolmogorov, el intervalo que cubre dichas escalas se denomina rango disipativo.

Si el flujo de energía a lo largo de los distintos pasos de la cascada,  $\phi_n$ , se considera independiente del paso (de la escala) en cuestión, es decir, igual a  $\phi$  (para todo  $n$ ),  $\phi$  será igual al flujo de energía a través de todo el rango inercial y a la energía disipada en la unidad de tiempo en el rango disipativo, es decir, igual a  $\varepsilon$ .

## Aspectos fundamentales de la turbulencia

De acuerdo con las consideraciones anteriores, en la Fig. 2.1 se muestra de modo esquemático, la cascada de Richardson.



**Figura 2.1:** Esquema de cascada energética de Richardson con remolinos ocupando un volumen similar al ocupado por los del paso anterior

## 2.5. Turbulencia 2D vs. 3D

En primer lugar, recordemos que el espectro de energía representa la distribución de la energía cinética a lo largo del espacio de Fourier, es decir, la distribución de la energía para las distintas frecuencias,  $E(\omega)$  (o los distintos números de onda,  $E(k)$ ).

Recordando la relación existente entre las variables en el espacio físico (temporal -  $t$  - o espacial -  $l$ ) y el de Fourier ( $\omega = \frac{2\pi}{t}$  y  $k = \frac{2\pi}{l}$ ),  $E(\omega)$  representa la energía de los remolinos con un tiempo de giro igual a  $\frac{2\pi}{\omega}$ , y  $E(k)$  la energía de los remolinos de tamaño  $\frac{2\pi}{k}$ .

### Turbulencia 3D (Teoría de Kolmogorov)

Para el caso tridimensional, de acuerdo con la teoría de Kolmogorov (que analizaremos en detalle en capítulos posteriores), en condiciones de homogeneidad e isotropía, la velocidad para una determinada escala (suficientemente alejada de las escalas integral y de Kolmogorov) depende sólo del flujo de energía  $\varepsilon^3$ . En el estado de fases, esta hipótesis se traduce en que, para un determinado número de onda  $k$ , la densidad de energía  $E(k)$  depende sólo de ese flujo. Es decir,  $E(k) = f(\varepsilon, k)$ .

Aplicando análisis dimensional:

$$E(k) = \frac{E}{k} \sim EL \sim L^3 T^{-2} \quad (2.18)$$

Recordemos las dimensiones para el flujo de energía:  $\varepsilon \sim \frac{E}{T} \sim L^2 T^{-3}$

Dado que  $k$  no depende de  $T$ , se debe conseguir el  $T^2$  con  $\varepsilon$ . En ese sentido,  $\varepsilon^{2/3}$  tiene dimensiones de  $L^{4/3} T^2$ , por tanto:

---

<sup>3</sup> Habitualmente, el flujo de energía se representa por  $\varepsilon$ , pues como hemos indicado, el flujo de energía a través del rango inercial coincide con la energía disipada en la unidad de tiempo,  $\varepsilon$ , en el rango disipativo.

$$E(k) \propto \varepsilon^{2/3} h(k) \quad (2.19)$$

Si  $h(k)$  tiene como dimensión  $L^{5/3}$ ,  $E(k)$  tendrá las dimensiones adecuadas.

Dado que el número de onda tiene como dimensión  $L^{-1}$ , la pendiente del espectro de energía resulta ser  $-5/3$ :

$$E(k) \propto \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (2.20)$$

En ausencia de homogeneidad e isotropía, se puede abordar el análisis de la pendiente del espectro de energía siguiendo a Chen & Zhou (2005). En efecto, si en la ecuación de Navier-Stokes se representa el término de disipación por la laplaciana fraccional en lugar de por la laplaciana estándar, la ecuación presenta el siguiente aspecto:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \nabla \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{\text{Re}} (-\Delta)^{\alpha/2} \vec{u} \quad (2.21)$$

Donde  $(-\Delta)^{\alpha/2}$  es la laplaciana fraccional, siendo  $\alpha$  un parámetro denominado parámetro de estabilidad de Lévy, cuyo valor se encuentra en el intervalo  $(0,2]$ .

Aplicando el análisis dimensional a la ecuación anterior, se puede llegar a la siguiente expresión para el espectro:

$$E(k) \propto \tilde{\varepsilon}^{2/3} k^{-\frac{9-2\alpha}{3}} \quad (2.22)$$

Donde  $\tilde{\varepsilon}$  es la disipación  $\varepsilon$  escalada por el parámetro  $\alpha$ .

La forma espectral anterior responde a una distribución estadística de Lévy (Lévy 1925, Cartea & Howison 2002, Vasconcelos 2004). El parámetro  $\alpha$  indica lo puntiaguda que es la distribución. Conforme aumenta el valor de  $\alpha$ , la función de densidad de probabilidad correspondiente presenta colas menos alargadas. Por

## Aspectos fundamentales de la turbulencia

---

ejemplo, para  $\alpha = 2$  se obtiene un tipo particular de distribución de Lévy (la Gaussiana), y para  $\alpha = 1$  una distribución de Cauchy. Para más información sobre las distribuciones de Lévy puede acudir al Apéndice I.

Por otro lado, también hay que indicar que en turbulencia 3D existe otra constante del movimiento, la helicidad ( $H$ ) (Moffatt 1992), que se define como la proyección de la vorticidad sobre la velocidad en cada punto del flujo, es decir:

$$H = \int \vec{u} \cdot (\nabla \times \vec{u}) d^3\vec{r} \quad (2.23)$$

Donde la variable  $\vec{\omega}$  se denomina vorticidad y se corresponde con el rotacional de la velocidad:  $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$ .

### Turbulencia 2D (Teoría KLB)

La ecuación de Navier-Stokes caracteriza la conservación de la cantidad de movimiento en los fluidos:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} + \frac{\vec{f}}{\rho} \quad (2.24)$$

Si se aplica el operador rotacional a todos los términos de esa ecuación, se puede obtener la ecuación de la vorticidad (las fuerzas externas, en general, son de carácter conservativo y por lo tanto su rotacional es cero):

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\omega} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u} + \nu \nabla^2 \vec{\omega} \quad (2.25)$$

En esa ecuación, el primer término de la derecha representa el estiramiento de los tubos de vorticidad en la dirección de la velocidad (o líneas de vorticidad), y el segundo término la disipación de energía por viscosidad.

Los flujos con turbulencia 2D (Wyngaard 2010) se caracterizan porque la componente vertical de la velocidad se puede considerar despreciable frente a la componente horizontal (el movimiento tiene lugar en el plano x-y). Por tanto, en un

## Aspectos fundamentales de la turbulencia

---

flujo de este tipo, la vorticidad sólo tendrá una componente, en dirección perpendicular a las componentes de la velocidad:

$$\vec{u} = (u, v, 0) \Rightarrow \vec{\omega} = \left( 0, 0, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.26)$$

Por tanto, en turbulencia bidimensional, la ecuación vectorial representativa de la vorticidad se reduce a una única ecuación escalar:

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega + \left( u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \omega = \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \omega \quad (2.27)$$

donde  $\omega$  representa la componente no nula de la vorticidad, es decir:  $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$

Se observa que en esta ecuación ha desaparecido el término representativo del estiramiento de los tubos de vorticidad o vórtices. La desaparición de ese término hace que, en ausencia de viscosidad, se conserve la vorticidad y, en consecuencia, también la enstrofia, que se define como:

$$Z = \frac{1}{2} \|\vec{\omega}\|^2 \quad (2.28)$$

De acuerdo con la teoría KLB (Kraichnan 1967, Leith 1968, Batchelor 1969), en el caso bidimensional existen dos cascadas: una de enstrofia en sentido directo (desde la escala de inyección de energía hacia las escalas menores, en la que el espectro de energía presenta una pendiente de -3) y otra de energía en sentido inverso (desde la escala de inyección hacia las escalas mayores, donde el espectro presenta una pendiente de -5/3).

En efecto, suponiendo nuevamente condiciones de homogeneidad e isotropía, la conservación de la energía en el caso 2D conlleva la existencia de una cascada de energía, con la misma pendiente que en 3D, sólo que en este caso, a diferencia de la

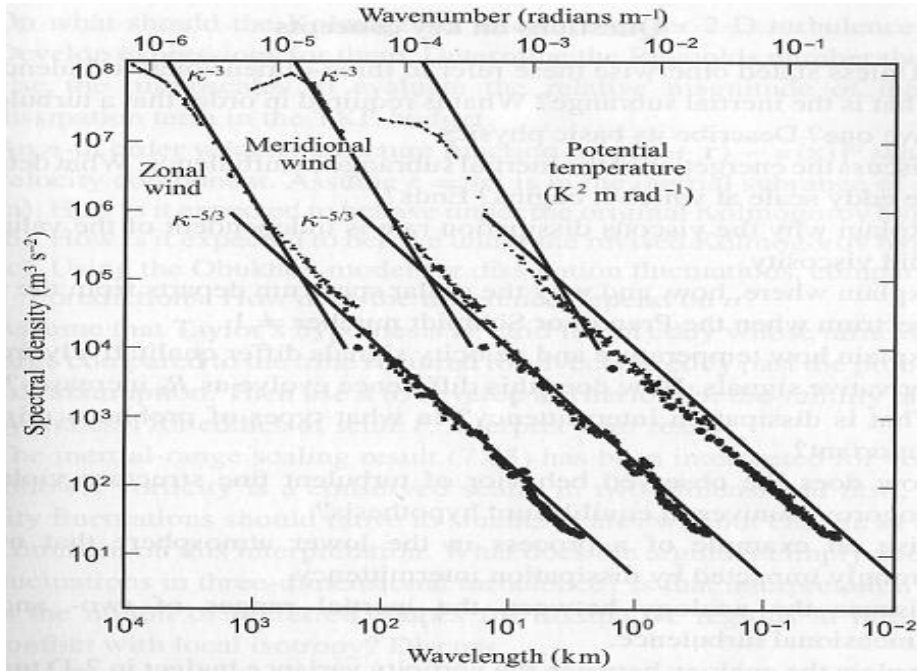
## Aspectos fundamentales de la turbulencia

turbulencia 3D, se produce de las escalas menores a las mayores (lo que da lugar a las llamadas estructuras coherentes).

Pero además, la teoría KLB supone, de forma similar a la de Kolmogorov, que la energía a una determinada escala  $k$ , dentro de un rango de números de onda mayores que la escala de inyección y lo suficientemente alejados de la escala de disipación, es sólo función del flujo de enstrofia  $\beta$  ( $\beta = k^2 \varepsilon$  por análisis dimensional). Con ello, a partir de la expresión deducida por Kolmogorov, se obtiene que la pendiente para el espectro de energía es de -3:

$$E(k) \propto \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} = (\beta k^{-2})^{2/3} k^{-5/3} = \beta^{2/3} k^{-3} \quad (2.29)$$

Existen distintos procedimientos para la obtención de estos espectros. El método utilizado en la tesis ha sido el de Blackman & Tukey (1958), explicado con más detalle en el Apéndice II. En la figura 2.2 se muestra el espectro obtenido por Nastrom & Gage (1985) de las componentes de la velocidad horizontal (también el de la temperatura potencial) en la atmósfera, por encima de la CLA.



**Figura 2.2:** Espectro de las componentes de la velocidad horizontal y de la temperatura en la atmósfera, por encima de la CLA (Wyngaard 2010, pág. 167)

Esta figura resulta ilustrativa de lo que acabamos de explicar. En efecto, por encima de la CLA, en las escalas superiores a los centenares de km, el espectro presenta una

## Aspectos fundamentales de la turbulencia

---

pendiente próxima a  $-3$ , que se puede corresponder con una cascada directa de enstrofia (Wyngaard 2010). Sin embargo, en escalas menores se observa una pendiente en torno a  $-5/3$ , que se puede asociar a una cascada inversa de energía. De hecho, según Gage & Nastrom (1986), parece razonable suponer que, a escalas pequeñas, las “ondas que rompen” suponen una importante fuente de energía.

Como veremos a lo largo de la tesis, los resultados obtenidos tanto a nivel empírico como a partir de los modelos existentes muestran que en la turbulencia bidimensional el fenómeno de la intermitencia es prácticamente inexistente, lo que posiblemente se deba a la imposibilidad de estiramiento por parte de los vórtices.

Por otro lado, a diferencia de lo que ocurre en 3D, en turbulencia bidimensional la helicidad no es una constante del movimiento, ya que la velocidad del viento no cambia de dirección con la altura, por lo que la helicidad es cero.

### **2.6. Turbulencia en la CLA**

Contrariamente a lo que ocurre en la alta atmósfera, la CLA es una capa esencialmente turbulenta, por lo que para analizar adecuadamente su estructura será necesario conocer detalladamente la estructura y amplitud de los remolinos turbulentos responsables del transporte vertical del momento lineal. La turbulencia en la CLA tiene dos posibles orígenes: térmico y mecánico. La turbulencia de origen térmico se genera por el calentamiento superficial debido a la acción solar, lo que ocasiona térmicas de aire caliente ascendente. Por su parte, la turbulencia de origen mecánico se puede generar por diversos mecanismos: la superación de obstáculos por parte del flujo, la ruptura de ondas, o la cizalladura producida por la fricción sobre el suelo, por la presencia de *LLJs* o por flujos catabáticos. Por tanto, el régimen de la CLA depende de forma fundamental de las condiciones de estratificación térmica y del viento, las cuales a su vez, evolucionan a lo largo del día.

En cuanto a la estratificación térmica, el signo de la diferencia entre la temperatura potencial de dos niveles nos indica si existe estabilidad o inestabilidad de estratificación (estabilidad en caso de mayor temperatura potencial en el nivel



## Aspectos fundamentales de la turbulencia

---

superior, e inestabilidad en caso contrario). Por otro lado, es posible relacionar las variaciones en la temperatura potencial  $\Delta\theta$  y en la temperatura  $\Delta T$  entre dos niveles separados una distancia  $\Delta z$  (Arya 2001):

$$\Delta\theta = \Delta T + 0.0098 \Delta z \quad (2.30)$$

De acuerdo con esto, considerando por ejemplo los niveles de 50m y 0.22m (que serán los empleados en los cálculos realizados en la tesis con los datos SABLES98), la diferencia entre las temperaturas de ambos niveles ( $T_{50} - T_{0.22}$ ) que marca el límite entre situación estable e inestable será de  $-0.4878^\circ$ , valor que se obtiene sustituyendo en la expresión (2.30)  $\Delta\theta$  por cero y  $\Delta z$  por  $(50 - 0.22)$ , y despejando  $\Delta T$ . En situaciones con fuerte estabilidad de estratificación, en las que las corrientes verticales se ven muy inhibidas, la turbulencia se verá limitada, pudiendo no desarrollarse totalmente, al contrario de lo que ocurre en situaciones inestables. Por tanto, la fuerte estabilidad conllevará un comportamiento similar a la turbulencia bidimensional. Por el contrario, en situaciones inestables debemos esperar espectros propios de la turbulencia 3D.

## **2.7. Geometría fractal**

El esquema en cascada de Richardson plantea de forma evidente la repetición de estructuras similares a distinto tamaño. Para tratar de describir la generación de las mismas hay que servirse de la geometría fractal, que resulta más completa que la geometría euclidiana. Un fractal se caracteriza por dos aspectos: la autosemejanza o autosimilitud y la dimensión fractal.

### **2.7.1. Autosemejanza o autosimilitud**

Una estructura es autosimilar o autosemejante cuando es el resultado de un conjunto de copias a menor tamaño de sí misma. Es decir, la autosemejanza indica la invariancia con la escala del proceso y, por tanto, los fractales son estructuras que no presentan una escala característica (Mandelbrot 1977, Mandelbrot 1982, Lauwerier & Kaandorp 1988).

Esa autosimilitud puede ser determinista o tan solo estadística. El primer tipo de autosimilitud tan solo se presenta en los fractales más simples (llamados fractales lineales), que se pueden generar a partir de los números naturales y la geometría euclidiana. Estos fractales son exactamente idénticos a cualquier escala considerada (hasta el infinito). Ejemplos de este tipo de fractales son: la curva de Koch, el conjunto de Cantor...

La autosimilitud estadística corresponde a los fractales no lineales, que se generan a partir de números complejos. Ejemplos de este tipo de autosimilitud lo constituyen el conjunto de Mandelbrot, el conjunto de Julia (1918)...

Llegados a este punto, resulta necesario introducir el concepto de proceso estocástico autosemejante. Un proceso  $X(t)$  es autosimilar (Muñoz 2005, Di Matteo 2007) si:

$$\forall a \quad \exists b / X(at) \approx bX(t) \quad (2.31)$$

donde  $b=a^H$ ;  $H$  se denomina exponente de autosimilitud o exponente de Hurst (Hurst 1951, Cattoni et al. 2004, Di Matteo 2007), y es un valor comprendido entre 0 y 1 (Mandelbrot 1972). El símbolo  $\approx$  significa igualdad en sentido estricto, si se trata de autosemejanza determinista; si la autosemejanza es tan solo estadística, ese símbolo indica que ambos miembros de la ecuación tienen la misma distribución de probabilidad. El exponente de Hurst caracteriza la autosemejanza de que se trate.

A este respecto, Hurst estableció en 1951 el llamado análisis R/S (análisis de rango reescalado). El estadístico R/S es el rango de las sumas parciales de las desviaciones de la serie respecto de su media, divididas por la correspondiente desviación estándar, es decir:

$$R / S_n = \frac{1}{S_n} \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^k (x_j - \bar{x}_n) - \min_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^k (x_j - \bar{x}_n) \right\} \quad (2.32)$$

Siendo  $S_n$  la desviación estándar correspondiente a  $n$  observaciones.

## Aspectos fundamentales de la turbulencia

---

Pues bien, el estadístico  $R/S_n$  presenta una relación de tipo potencial con las observaciones  $n$ , de tal forma que;

$$R/S_n = an^H \quad (2.33)$$

Tomando logaritmos:

$$\log (R/S_n) = \log (a) + H \log(n) \quad (2.34)$$

De acuerdo con esa expresión, el exponente de Hurst puede estimarse a través de la pendiente de la recta  $\log(R/S_n)$  vs.  $\log(n)$ . Aplicando una simulación Monte Carlo, Hurst observó que cuando los valores de  $H$  eran superiores a 0.5, la serie presentaba persistencia y que, por el contrario, cuando los valores de  $H$  eran inferiores a ese umbral, la serie era antipersistente.

Posteriormente se han presentado otros métodos de estimación del exponente de Hurst, entre los que podemos destacar el *Detrended Fluctuation Analysis* (DFA) (Hu *et al.* 2001, Tarquis *et al.* 2008), el *Average Wavelet Coefficient Method* (Percival & Walden 2000), o el método del exponente de Hurst generalizado (Di Matteo 2007), que será el utilizado en esta tesis, y que en breve introduciremos.

Sin embargo, es posible que no exista un proceso de autosemejanza único para todas las escalas, en cuyo caso  $H$  ya no presenta un valor constante, sino que varía con la escala  $t$  considerada, es decir,  $H = H(t)$ . En ese caso, a ese exponente de Hurst local también se le denomina exponente de Hölder,  $h(t)$  (o, en la nomenclatura de algunos autores,  $\alpha(t)$ ).

El exponente de Hölder es una propiedad local, caracteriza una estructura fractal singular, a diferencia del exponente de Hurst, que se trata de una característica global, es decir, del conjunto de fractales. Cuando  $H$  es constante, se habla de monoescalamiento, a diferencia de cuando depende de la escala, en cuyo caso el proceso es multiescalar (Tarquis *et al.* 2006). Este último tipo de procesos ya no se pueden, por tanto, caracterizar por un único valor  $H$ , por lo que se introduce el concepto de exponente de Hurst generalizado,  $H(p)$ , (Di Matteo 2007) a partir del

## Aspectos fundamentales de la turbulencia

---

escalamiento de las funciones de estructura de la variable de orden  $p$ : Las funciones de estructura de orden  $p$  de la velocidad,  $S_p$ , se definen como:

$$S_p(l_n) = \frac{\langle |u_n|^p \rangle = \langle |u(x + l_n) - u(x)|^p \rangle}{\langle |u(x)|^p \rangle} \quad (2.35)$$

Es decir, se corresponden con los momentos estadísticos (de orden  $p$ ) de los valores absolutos de la variable  $y$ , por tanto, sirven para caracterizar por completo a la distribución de probabilidad (la expresión (2.35) aparece ya normalizada). Pero además, esas funciones de estructura presentan escalamiento (en el rango inercial), es decir, presentan una relación de tipo potencial con la escala, de tal forma que:

$$S_p \propto l^{\zeta_p} \quad (2.36)$$

donde  $\zeta_p$  representa los exponentes de escala de las funciones de estructura de orden  $p$ . A su vez, esos exponentes de escala se pueden relacionar con el exponente de Hurst generalizado a través de la siguiente expresión (Richards-Pecou 2002):

$$\zeta_p = p H(p) \quad (2.37)$$

En definitiva, la autosemejanza puede presentar el mismo o distinto comportamiento a lo largo de todo el proceso de generación del fractal. En el primer caso tan sólo se requerirá un exponente  $H$  para caracterizar el comportamiento para todo el conjunto, es decir, tan sólo existe una estructura fractal para todo el proceso (monofractalidad). En el segundo caso serán necesarios distintos exponentes, cada uno de los cuales reflejará las propiedades de la autosemejanza a una escala local, existiendo, por tanto, varias estructuras fractales, es decir, multifractalidad, (Grout *et al.* 1998). Conocidos los distintos  $H(p)$  (o los distintos  $h(t)$ ), quedará definida la estructura multifractal.

Los exponentes de Hurst correspondientes a ciertos valores del orden  $p$  están asociados a determinadas características. Así, por ejemplo, el valor de  $H(1)$  describe las conductas de escalamiento que presentan los valores absolutos de los incrementos

## Aspectos fundamentales de la turbulencia

---

de la variable, y se puede asociar a la persistencia o antipersistencia de la serie temporal (si  $H(1) > 0.5$  existe persistencia y, en caso contrario, antipersistencia). Por su parte,  $H(2)$  se puede relacionar con la pendiente del espectro de potencia,  $b$ , a través de la siguiente relación (Lantsman & Major 2001, Richards-Pecou 2002, Di Matteo 2007):

$$b = 1 + 2H(2) \quad (2.38)$$

En efecto, la densidad espectral de la velocidad se puede calcular a partir de la transformada de Fourier de la función de autocorrelación, y esa función de autocorrelación es proporcional al momento de orden 2 de la distribución de las variaciones de velocidad, es decir, a la función de estructura de la velocidad de orden 2. Por otro lado, las componentes de la transformada de Fourier de una función que en el dominio temporal sigue una ley de escala con exponente  $h$ , son proporcionales, en el dominio de frecuencias, a  $f^{h-1}$ . Por tanto, la densidad espectral correspondiente a una señal que sigue la ley (2.36) deberá seguir una ley potencial con un exponente igual a  $-\zeta_2 - 1$ . Es decir, la densidad espectral debe ser proporcional a  $f^{-\zeta_2 - 1}$ . Teniendo en cuenta (2.37), la pendiente del espectro será la indicada en (2.38).

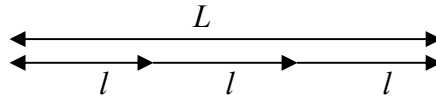
### 2.7.2. Dimensión fractal y espectro multifractal

La dimensión fractal describe las características de ocupación del espacio. Existen numerosas definiciones de dimensión fractal (Stanley 1987, Barabasi *et al.* 1991, Mandelbrot 1997, Gonçalves & Riedi 1999, Gutiérrez & Rodríguez 2000), lo que conlleva distintos métodos para calcular dicha dimensión (aunque todos esos métodos, al aplicarse a estructuras autosemejantes, conducen a un mismo resultado).

Una definición habitual es la de dimensión de Hausdorff (1919), a la que se puede llegar generalizando el concepto de dimensión de algunas estructuras lineales (Talanquer 1996):

- *Para una línea:*

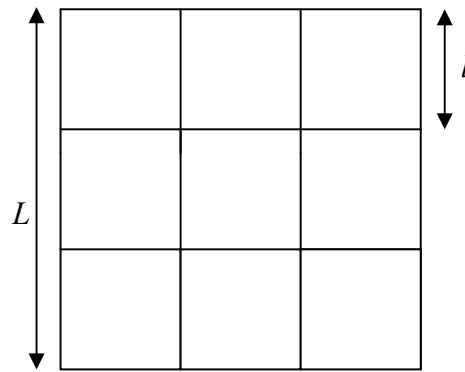
Consideremos una recta de longitud  $L$  y dividámosla en varias partes de tamaño  $l$  (supongamos por ejemplo  $l=L/3$ , aunque podría ser de otro tamaño)



El número de particiones (o copias a menor escala) que hemos generado será obviamente:  $N = \frac{L}{l}$  (en nuestro caso  $N = 3$ )

- Para un cuadrado:

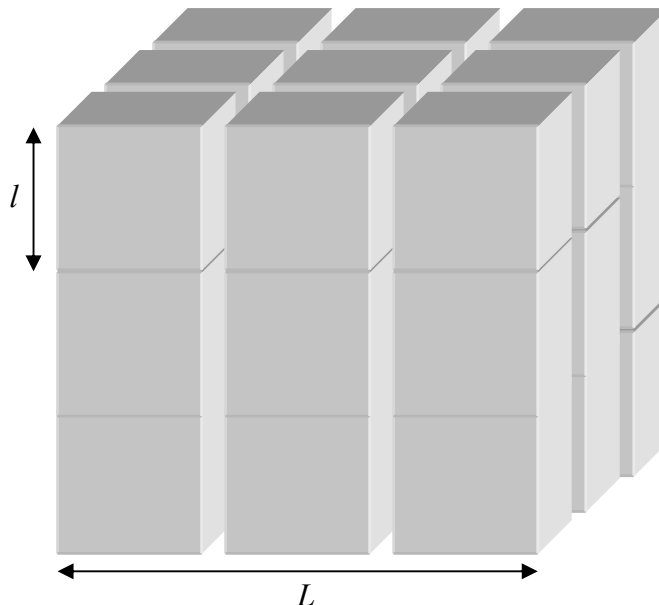
Consideremos ahora un cuadrado de lado  $L$  y dividamos análogamente sus lados en varias partes de tamaño  $l$  (por ejemplo igual a  $L/3$  como hemos hecho anteriormente).



En este caso, el número de copias de lado  $l$  resulta:  $N = \frac{L^2}{l^2} = \frac{L^2}{\left(\frac{L}{3}\right)^2} = 9$

- Para un cubo:

Si realizamos la misma división para el caso de un cubo de lado  $L$



El número de cubos de tamaño  $l$  será: 
$$N = \frac{L^3}{l^3} = \frac{L^3}{\left(\frac{L}{3}\right)^3} = 27$$

Generalizando, podemos escribir  $N = \left(\frac{L}{l}\right)^D$  donde  $D$  es la dimensión de Hausdorff. Es decir, la dimensión es el exponente de una relación de tipo potencial entre la medida  $N$  y el factor de proporcionalidad en el cambio de escala ( $L/l$ ). Por tanto:

$$D = \frac{\log N}{\log\left(\frac{L}{l}\right)} \quad (2.39)$$

La dimensión fractal y el exponente de Hurst se encuentran relacionados (Schroeder 1991, Addison 1997) por la siguiente expresión:

$$D = De + 1 - H \quad (1) \quad (2.40)$$

siendo  $De$  la dimensión euclídea. Es decir, un mayor exponente de Hurst (de orden 1) conlleva una menor dimensión fractal. Valores mayores de ese exponente generalizado implican persistencia en la serie, y valores menores antipersistencia (considerando el valor de 0.5 como separador de ambos tipos de comportamiento). Cuanto mayor es la persistencia (antipersistencia), menor (mayor) es la variabilidad de la serie y, en consecuencia, menor (mayor) es la dimensión fractal.

Por otra parte, para cada estructura fractal, caracterizada por un exponente  $h$  como ya hemos indicado con anterioridad, se puede calcular su dimensión fractal,  $D(h)$  ( $f(\alpha)$  en la notación de algunos autores). El conjunto de todas esas dimensiones constituye el espectro multifractal o espectro de singularidades (pues cada una se refiere a una estructura singular). Obviamente, para el caso monofractal, su espectro se reduce a un punto. Como veremos con posterioridad, en el capítulo dedicado a la intermitencia, el espectro  $D(h)$  se puede calcular a partir de los exponentes de escala asociados a las funciones de estructura  $\zeta_p$  a través de la siguiente expresión, denominada Transformación de Legendre (Frisch 1995):

$$\zeta_p = \inf_h [ph + 3 - D(h)] \quad (2.41)$$

### 3. Intermitencia de la turbulencia<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup> Los resultados presentados en este capítulo correspondientes al modelo *shell* han sido publicados en el artículo: Vindel JM & Yagüe C (2009) Application of a GOY model to atmospheric boundary layer data. *Nonlinear Process. Geophys.* 16: 599-606.



### 3.1. Concepto de intermitencia

Como ya hemos indicado con anterioridad, los grandes remolinos turbulentos son inestables, por lo que desaparecen transfiriendo su energía a los remolinos menores. Cuando el número de Reynolds es suficientemente pequeño el movimiento de los remolinos se vuelve estable, y la energía se disipa debido a la viscosidad molecular. Por tanto, la disipación se produce fundamentalmente al final de la cascada, en el rango de disipación. Sin embargo, previamente el flujo energético ha podido modificarse. Pues bien, al fenómeno consistente en la variación de ese flujo a lo largo del llamado rango inercial se le denomina intermitencia de la turbulencia (Frisch 1995, Mahjoub 2000, Pope 2000).

En términos más generales, la intermitencia se puede ver como la variabilidad de la turbulencia con la escala, es decir, como la existencia de un proceso multiescalar, o multifractal, (frente a un proceso uniescalar, o monofractal), aunque su definición varía según el método que se utilice para estimarla (Mahrt 1989, Mahrt 1999, Mahrt 2009). En efecto, como veremos posteriormente, la intermitencia se corresponde, por un lado, con la desviación respecto de la forma lineal de la curva  $\zeta_p$  vs.  $p$ , donde  $\zeta_p$  son los exponentes de escala de las funciones de estructura de orden  $p$  (Batchelor & Townsend 1949, Landau & Lifshitz 1959), introducidos con anterioridad. Pero también la intermitencia puede ser vista como el cambio en la forma de las funciones de densidad representativas de los incrementos de velocidad (o de las tasas de transferencia energética) al disminuir la escala (Castaing *et al.* 1990, Biferale 1993, Gagne *et al.* 1994, Sorriso-Valvo *et al.* 2000, Mordant *et al.* 2001, Barndorff-Nielsen *et al.* 2004, Li & Meneveau 2005, Li & Meneveau 2006).

Debemos señalar que frente a este concepto de intermitencia, al que se suele denominar como intermitencia de escala fina, y que es al que se refiere la tesis, se encuentra la llamada intermitencia global (Mahrt 1989), que hace mención a un fenómeno distinto: la aparición y desaparición de todo el conjunto de remolinos.

### **3.2. Análisis de la intermitencia**

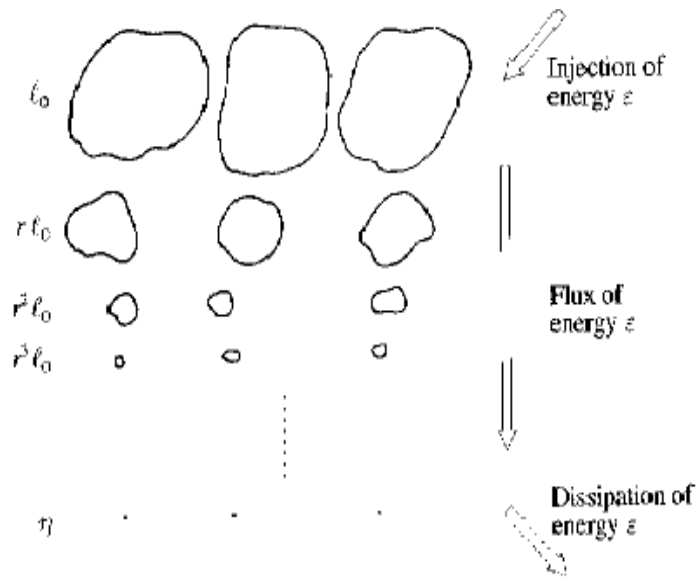
La intermitencia de la turbulencia, por tanto, hace referencia a la variación de la turbulencia con la escala, o más concretamente, a la variación de la variable representativa de la turbulencia (por ejemplo, la velocidad) con la escala. La variable turbulenta, que se comporta como una variable aleatoria para cada una de las distintas escalas, constituye por tanto un proceso estocástico. La distribución de probabilidad de esa variable aleatoria puede venir representada por sus momentos estadísticos (funciones de estructura), o por su propia función de densidad de probabilidad. En consecuencia, el estudio de la variabilidad de la variable turbulenta se reduce a estudiar la variación con la escala de las funciones de estructura correspondientes, o de las funciones de densidad. Según utilicemos una u otra forma de representación de la variable tendremos distintos métodos de estimación de la intermitencia.

#### **3.2.1. Funciones de estructura**

La generación en cascada de los remolinos nos sugiere la posibilidad de abordar el problema de dos formas: a través de un análisis fractal (en realidad, análisis multifractal) o de un análisis en cascada multiplicativa (utilizando el escalamiento que presenta el proceso y que, como ya hemos visto, nos conduce a un proceso autosimilar, es decir, fractal). En consecuencia, existe una clara correspondencia entre ambos tipos de enfoque, por lo que aquí tan sólo nos referiremos al análisis multifractal; no obstante, el desarrollo del análisis en cascada multiplicativa se ha incluido en el Apéndice III.

##### **- Estudio de la velocidad**

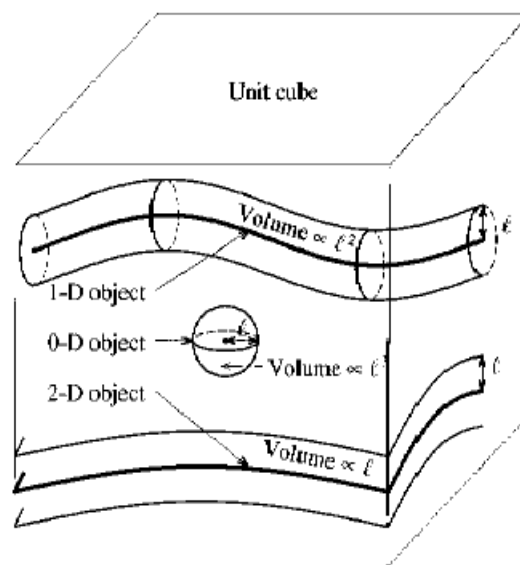
Supongamos una cascada de generación de remolinos más general que la considerada en la Fig. 2.1. En ella, los remolinos generados en cada paso (Fig. 3.1) no tienen por qué ocupar entre todos ellos un volumen similar al ocupado por los remolinos del paso anterior (Frisch 1995):



**Figura 3.1:** Esquema de cascada energética en la que los remolinos no ocupan un volumen similar al ocupado por los del paso anterior (Frisch 1995, pag. 136)

Veamos cual sería la fracción de volumen  $p_n$  ocupado por los remolinos de un tamaño  $\ell_n$ , para el caso, por ejemplo, de tres objetos: un punto, una curva y una superficie:

Supongamos un cubo de lado igual a la unidad que contiene estos tres objetos cuyas dimensiones son, respectivamente, 0, 1 y 2 (Fig. 3.2):



**Figura 3.2:** Fracción de volumen ocupado por los remolinos para el caso de un punto, una curva y una superficie (Frisch 1995, pag. 137)

Pues bien, la fracción de volumen buscada para cada caso será la probabilidad de que una esfera de radio  $l_n$ , cuyo centro se encuentra dentro del cubo según una distribución aleatoria uniforme, intersecte con el objeto en cuestión. Para el primer caso, el del punto, esa probabilidad será la probabilidad de que el centro de la esfera se encuentre dentro de una bola de radio  $l_n$ . Por tanto,  $p_n \propto l_n^3$ . Para el caso de la curva, será la probabilidad de que el centro de la esfera se encuentre dentro de un cilindro de radio  $l_n$  cuyo eje es la curva:  $p_n \propto l_n^2$ . Finalmente, para el caso de la superficie, se tratará de la probabilidad de que el centro de la esfera se encuentre dentro de un *sandwich* de espesor  $2l_n$ , es decir,  $p_n \propto l_n$ .

De acuerdo con esto, y recordando la dimensión de cada objeto, en todos los casos se cumple que  $p_n \propto l_n^{3-D}$  (cuando  $l_n$  tiende a 0). Más concretamente, de acuerdo con el significado de  $p_n$ :

$$p_n = \left( \frac{l_n}{l_0} \right)^{3-D} \quad (3.1)$$

Teniendo en cuenta esa fracción de volumen, la energía transferida a los remolinos de tamaño  $l_n$  por unidad de masa,  $E_n$ , será:

$$E_n \propto u_n^2 p_n = u_n^2 \left( \frac{l_n}{l_0} \right)^{3-D} \quad (3.2)$$

y, por tanto, por unidad de tiempo:

$$\phi_n \propto \frac{u_n^3}{l_n} p_n = \frac{u_n^3}{l_n} \left( \frac{l_n}{l_0} \right)^{3-D} \quad (3.3)$$

Por otra parte, recordemos que en el rango inercial el flujo de energía anterior resulta independiente de la escala, y que era igual a la tasa de disipación  $\varepsilon$ , es decir, que

$$\phi_n \sim \varepsilon \propto \frac{u_0^3}{l_0} \quad (3.4)$$

De ahí se deduce que

$$u_n \propto u_0 \left( \frac{l_n}{l_0} \right)^{\left( \frac{1}{3} - \frac{3-D}{3} \right)} \quad (3.5)$$

Por tanto, el exponente de escala en la ecuación anterior resulta:

$$h = \frac{1}{3} - \frac{3-D}{3} \quad (3.6)$$

En cuanto a la correspondiente función de estructura de orden  $p$ :

$$S_p(l_n) = \left\langle |u_n|^p \right\rangle \propto u_0^p \left( \frac{l_n}{l_0} \right)^{ph+3-D} \propto l_n^{\zeta_p} \quad (3.7)$$

donde  $\zeta_p = ph+3-D$  es el exponente de escala de la función de estructura de orden  $p$ .

Consideremos ahora un conjunto de  $n$  fractales caracterizados por sus exponentes de escala  $h_1, \dots, h_r, \dots, h_n$  (o por sus dimensiones correspondientes  $D(h_1), \dots, D(h_r), \dots, D(h_n)$ ). En ese caso, la función de estructura del conjunto será la combinación lineal de las funciones de estructura de cada uno de los componentes o singularidades, es decir:

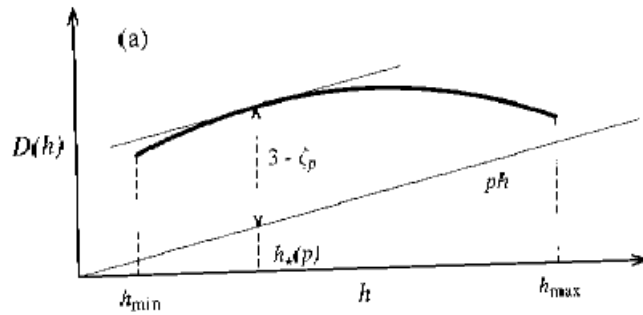
$$\frac{\left\langle |u_n|^p \right\rangle}{u_0^p} = \mu_l \left( \frac{l_n}{l_0} \right)^{ph_l+3-D_l} + \dots + \mu_r \left( \frac{l_n}{l_0} \right)^{ph_r+3-D_r} + \dots + \mu_n \left( \frac{l_n}{l_0} \right)^{ph_n+3-D_n} \quad (3.8)$$

En el rango inercial, cuando  $l_n \ll l_0$ , la potencia con el exponente menor será la más importante. Por tanto, podemos hacer la siguiente aproximación:

$$\langle |u_n|^p \rangle \propto l_n^{\zeta_p} \quad \text{con} \quad \zeta_p = \min_h (ph + 3 - D(h)) \quad (3.9)$$

Esta expresión proporciona los exponentes de escala de las funciones de estructura de orden  $p$  en función de los exponentes de escala  $h$  que caracterizan a las distintas estructuras fractales existentes en el modelo (y en función también de las dimensiones correspondientes a dichas estructuras). Puede observarse que la parte  $3 - D(h)$ , es decir, la codimensión fractal, representa la parte que el exponente de escala se aleja de la forma lineal ( $ph$ ) y, en consecuencia se corresponde con la intermitencia de la turbulencia.

Veamos gráficamente la expresión (3.9) en la Fig. 3.3:



**Figura 3.3:** Dimensión fractal vs. exponentes de escala (Frisch 1995, pag. 146)

Dado un determinado  $p$ , el valor de  $\zeta_p$  será el valor mínimo (para los distintos valores de  $h$  posibles) de  $ph + 3 - D(h)$ . Ese valor mínimo se obtendrá para el valor  $h$  que maximice  $D(h) - ph$ , que a su vez, despejando, será igual a  $3 - \zeta_p$ .

En la gráfica se observa que la máxima distancia entre  $D(h)$  y  $ph$  se obtiene para un  $h$  igual a  $h_*$  para el cual la pendiente de  $D(h)$  es igual a  $p$ . Es decir,  $D'(h_*(p)) = p$

Por tanto:

$$\zeta_p = ph_*(p) + 3 - D(h_*(p)) \quad (3.10)$$

Ahora, si derivamos esa expresión con respecto al orden, tendremos:

$$\frac{d\zeta_p}{dp} = h_*(p) + [p - D'(h_*(p))] \frac{dh_*(p)}{dp} = h_*(p) \quad (3.11)$$

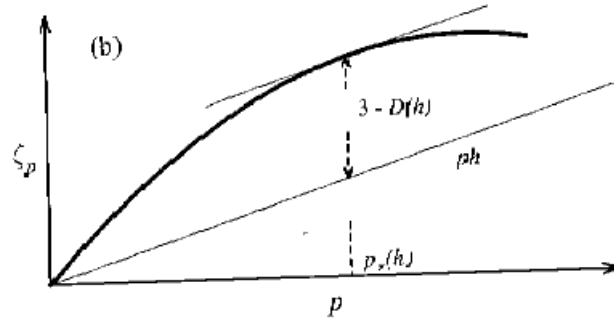
Esto demuestra que  $D(h)$  y  $\zeta_p$  se encuentran relacionadas por una transformada de Legendre, es decir, la derivada de una es la inversa de la derivada de la otra:

$$D'(h) = \frac{dD}{dh} = \left( \frac{d\zeta_p}{dp} \right)^{-1} = (\zeta'_p(p))^{-1} \quad (3.12)$$

Por tanto, invirtiendo la expresión (3.12) se pueden despejar las dimensiones en función de los exponentes de escala de orden  $p$  y de los exponentes  $h$ :

$$D(h) = \inf_p (ph + 3 - \zeta_p) \quad (3.13)$$

Gráficamente, podemos verlo en la Fig. 3.4:



**Figura 3.4:** Exponentes de escala vs. orden de las funciones de estructura (Frisch 1995, pag. 146)

Ahora en este caso lo que obtenemos para un determinado exponente  $h$  es que la pendiente de  $\zeta_p$  para el valor  $p_*(h)$  que minimiza  $ph+3-\zeta_p$  será el propio  $h$ .

#### - Estudio de la disipación de energía

En lugar de estudiar la fractalidad para la variable velocidad, podemos hacerlo para la variable disipación  $\varepsilon_n$ :

## Intermitencia de la turbulencia

---

El exponente de escala (que caracteriza la fractalidad para esa variable) se suele representar por  $\alpha$  (más concretamente por  $\alpha-1$ ). Es decir, de modo análogo a la ecuación (3.5):

$$\varepsilon_n \propto \varepsilon_0 \left( \frac{l_n}{l_0} \right)^{\alpha-1} \propto \frac{u_0^3}{l_0} \left( \frac{l_n}{l_0} \right)^{\alpha-1} \quad (\text{cuando } l_n \text{ tiende a } 0) \quad (3.14)$$

De acuerdo con la expresión anterior y, análogamente al caso de la función de estructura para la velocidad, tendremos para la tasa de disipación de energía que el momento de orden  $q$  resulta

$$\langle \varepsilon_n^q \rangle \propto \left( \frac{u_0^3}{l_0} \right)^q \left( \frac{l_n}{l_0} \right)^{q(\alpha-1)+3-F(\alpha)} \propto l_n^{\tau_q} \quad (3.15)$$

$$\text{con} \quad \tau_q = q(\alpha-1) + 3 - F(\alpha) \quad (3.16)$$

donde hemos representado la dimensión del fractal por  $F(\alpha)$ , que es una manera habitual de hacerlo.

Y, si consideramos una estructura multifractal:

$$\tau_q = \min_{\alpha} [q(\alpha-1) + 3 - F(\alpha)] \quad (3.17)$$

$\tau_q$  y  $F(\alpha)$  vuelven a estar relacionadas por una transformación de Legendre.

En lugar de utilizar  $F(\alpha)$  como espectro multifractal (espectro de singularidades) se suele emplear  $f(\alpha)$ , que se define como  $f(\alpha) = F(\alpha) - 2$ , debido a que, dada la dificultad para medir la tasa de energía, se utiliza como representativo el espacio unidimensional en lugar del espacio tridimensional (por ello se disminuye la dimensión en 2).

- Relación entre ambos casos



A partir de las ecuaciones (3.5) y (3.14) se observa que las funciones  $u_n$  y  $(l_n \varepsilon_n)^{1/3}$  presentan las mismas propiedades de escala (es decir, ambas presentan los mismos exponentes de escala para las distintas funciones de estructura). Por tanto, una singularidad de  $l_n \varepsilon_n$  caracterizada por  $\alpha$  se encuentra asociada a una singularidad de  $u_n$  caracterizada por  $h$  igual a  $\alpha/3$ . De acuerdo con esto:

$$D(h) = F(\alpha) = f(\alpha) + 2 \quad (3.18)$$

$$\zeta_p = \frac{p}{3} + \tau_{p/3} \quad (3.19)$$

### 3.2.2. Funciones de densidad de probabilidad

Otra posible forma de abordar el estudio de la intermitencia es a través de las funciones de densidad de probabilidad. En efecto, la evolución con la escala en la forma de esas funciones sirve también para estimar el grado de intermitencia existente. En el caso de turbulencia homogénea, cuyas funciones de densidad características resultan ser Gaussianas, cuanto más se aleje la función de esa forma Gaussiana, mayor será la intermitencia. Esa evolución se puede visualizar fácilmente en ocasiones, como veremos en algunas situaciones de estudio, pero para tratar de estimarla con más precisión, se puede recurrir a la cuantificación de la forma de la función de densidad a través, por ejemplo, de la curtosis.

### 3.2.3. Curtosis

Otra forma de hacer patente el grado de intermitencia de la turbulencia, en relación con el punto anterior, es cuantificar el cambio en la forma que experimentan las funciones de densidad. Para ello, se puede utilizar algún parámetro que resulte indicativo de la forma que presentan esas funciones, como es el caso de la curtosis. La curtosis,  $F$  (de *flatness*), se define como

$$F = \frac{S_4}{(S_2)^2} \quad (3.20)$$

donde  $S_4$  y  $S_2$  son las funciones de estructura de orden 4 y 2 respectivamente.

$F$  es por tanto un índice indicativo del grado de planitud que tiene la función de densidad representativa de la distribución de probabilidad. En ese sentido, cuanto mayor sea el cambio que experimenta ese índice a lo largo del rango inercial, mayor será el grado de intermitencia. En el caso de turbulencia homogénea, cuanto más se aleje el valor de la curtosis de las funciones de densidad de 3 (valor de la curtosis de una Gaussiana), mayor será la intermitencia. Por ello, un índice muy utilizado para caracterizar la forma de las funciones de densidad es el  $\log(F/3)$  (Chevillard *et al.* 2005). El número 3 hace referencia al valor que, como decimos, presenta la curtosis de la Gaussiana. Cuanto mayor sea ese índice, mayor será el alejamiento de la función de densidad respecto de la distribución normal y, en consecuencia, mayor será el grado de intermitencia existente (un ejemplo de la evolución de la curtosis con la escala puede verse, por ejemplo, en Bottcher *et al.* 2007).

### 3.3. Modelos de intermitencia

Cuando se cumple la ley de escala para los órdenes pares y la aproximación de flujo incompresible se mantiene para altos números de Reynolds, las curvas  $\zeta_p$  vs.  $p$  deben ser cóncavas en los órdenes pares. En efecto, de acuerdo con la desigualdad de Hölder sobre los momentos de las variables aleatorias (Frisch 1995):

$$\left\langle u_n^{2p_2} \right\rangle^{2p_3-2p_1} \leq \left\langle u_n^{2p_1} \right\rangle \left\langle u_n^{2p_3} \right\rangle^{2p_2-2p_1} \quad (3.21)$$

Si en esa desigualdad tenemos en cuenta la proporcionalidad ya mencionada para las funciones de estructura, es decir,  $\left\langle u_l^{2p} \right\rangle \propto u_0^{2p} \left( \frac{l_n}{l_0} \right)^{\zeta_{2p}}$ , y haciendo que  $l_n$  tienda a 0, obtenemos que

$$(p_3 - p_1)\zeta_{2p_2} \geq (p_3 - p_2)\zeta_{2p_1} + (p_2 - p_1)\zeta_{2p_3} \quad (3.22)$$

siendo  $p_1, p_2$  y  $p_3$  valores enteros positivos que verifican que  $p_1 \leq p_2 \leq p_3$ . Por tanto  $\zeta_{2p}$  presenta un comportamiento cóncavo con  $p$ .

También puede demostrarse que las curvas  $\zeta_{2p}$  vs.  $p$  son no decrecientes (Frisch 1995).

La suposición de flujo incompresible en altos números de Reynolds requiere de un régimen de turbulencia totalmente desarrollada, pues esta turbulencia se desarrolla sin restricciones impuestas, tales como límites y fuerzas externas. Pues bien, todos los modelos de intermitencia se han desarrollado para tratar de representar ese tipo de turbulencia.

Por otro lado, llegados a este punto resulta de interés introducir el concepto de *Extended Self Similarity* (ESS), debido a Benzi et al. (1993), que en lugar de representar las funciones de estructura (de orden  $p$ ) frente a la escala, representaron esas funciones de estructura frente a la de orden 3.

La función de estructura presenta una relación de tipo potencial frente a la escala (dentro del rango inercial) para el caso de turbulencia homogénea, es decir, si la distribución de probabilidad de la velocidad resulta independiente de la posición, e isotrópica (distribución de probabilidad invariante bajo rotaciones). Lo importante de la nueva representación (ESS) es que esa relación potencial se observa tanto para la turbulencia homogénea como para la no homogénea.

$$S_p \propto S_3^{\overline{\zeta_p}} \quad \text{con} \quad \overline{\zeta_p} = \frac{\zeta_p}{\zeta_3} \quad (3.23)$$

El nuevo exponente de escala  $\overline{\zeta_p}$  se denomina exponente de escala relativo (para diferenciarlo del exponente  $\zeta_p$ , que se acostumbra a denominar como exponente absoluto).

Aunque existe controversia en la comunidad científica acerca del significado de estos exponentes de escala relativos, en principio los mismos también pueden ser

## Intermitencia de la turbulencia

utilizados para estimar la intermitencia (Paret & Tabeling 1998). En efecto, la condición ESS tiene la ventaja de proporcionar un escalamiento más preciso que el obtenido al considerar exponentes absolutos, sobre todo, como ya hemos dicho, en ausencia de homogeneidad, por lo que la utilización de exponentes de escala relativos resulta más justificada. Pero por otro lado, la condición ESS representa la variación de las funciones de estructura, no directamente con respecto a la escala (como en el caso de los exponentes absolutos), sino con respecto a la función de orden 3, por lo que su medida de la intermitencia es más discutible. Además, como veremos posteriormente, los exponentes relativos resultan más uniformes que los absolutos, por lo que cuantitativamente discriminan menos el grado de intermitencia existente. Ello hace que los exponentes relativos, en ocasiones, no nos permitan distinguir claramente los distintos grados de intermitencia que presentan las situaciones representadas. Por todo ello, en este trabajo utilizaremos ambos tipos de exponentes con objeto de estimar la intermitencia existente.

A continuación veremos algunos de los modelos de intermitencia más frecuentemente utilizados, tanto en turbulencia homogénea como no homogénea.

### **3.3.1. Turbulencia homogénea**

Posteriormente veremos algunos casos particulares del análisis multifractal o en cascada multiplicativa que constituyen los modelos fenomenológicos más importantes (Frisch 1995, Marsch & Tu 1997, Pagel & Balogh 2001). Sin embargo, previamente debemos resaltar la condición que cualquier modelo de turbulencia homogénea debe satisfacer (la llamada Ley de los 4/5). Esta ley exacta establece que, en condiciones de homogeneidad e isotropía, la función de estructura de orden 3 está relacionada en el rango inercial con la tasa de transferencia de energía y la escala espacial a través de la siguiente expresión:

$$S_3 = -\frac{4}{5} \varepsilon l \quad (3.24)$$

Esta ley implica que el exponente de orden 3,  $\zeta_3$ , es igual a la unidad.

### 3.3.1.1. Teoría K41 o de Kolmogorov

La teoría de Kolmogorov (1941) (de ahí el nombre K41) se fundamenta en tres hipótesis:

#### 1) Hipótesis de isotropía local

El flujo es localmente isotrópico si para números de Reynolds suficientemente altos, la turbulencia a escalas pequeñas en relación a la escala integral ( $l_n \ll l_0$ ) no presenta ninguna dirección privilegiada.

#### 2) Primera hipótesis de autosimilitud

Verificándose la hipótesis anterior, la primera hipótesis establece que la distribución de probabilidad de la velocidad para las escalas pequeñas depende sólo de la viscosidad  $\nu$  y de  $\langle \epsilon \rangle$ .

El valor de  $\langle \epsilon \rangle$  hace referencia a la media de la tasa de disipación que, por homogeneidad, es igual a la media de las tasa de disipación para las distintas escalas, es decir,  $\langle \epsilon_n \rangle = \langle \epsilon \rangle$ .

De esta hipótesis podemos deducir el valor de la escala (espacial, temporal o de velocidad) de Kolmogorov, característica de la región disipativa.

En efecto, considerando el análisis dimensional, la única combinación posible de la viscosidad (con dimensiones de  $L^2T^{-1}$ ) con  $\langle \epsilon \rangle$  (con dimensiones de  $L^2T^{-3}$ ) para dar lugar a dimensiones de  $L$  es la siguiente:

$$\eta = \left( \frac{\nu^3}{\langle \epsilon \rangle} \right)^{1/4} \quad (3.25)$$

Análogamente para el tiempo y la velocidad:

$$\tau_\eta = \left( \frac{\nu}{\langle \varepsilon \rangle} \right)^{1/2} \quad (3.26)$$

$$u_\eta = (\langle \varepsilon \rangle \nu)^{1/4} \quad (3.27)$$

### 3) Segunda hipótesis de autosimilitud

En las condiciones de la primera hipótesis, la segunda hipótesis establece que la distribución de probabilidad de la velocidad depende únicamente de  $\langle \varepsilon \rangle$  en el rango inercial ( $\eta \ll l_n \ll l_0$ ).

Los efectos viscosos se hacen más importantes cuanto menor es la escala. Por ello, tan sólo las escalas más pequeñas se verán afectadas por los efectos disipativos y, en consecuencia, en las escalas pequeñas, pero donde la viscosidad  $\nu$  no es importante, la distribución de probabilidad tan sólo dependerá de  $\langle \varepsilon \rangle$ . El rango donde se verifica esta hipótesis se considera como el rango inercial.

Consecuencia de estas hipótesis es que el flujo turbulento es autosimilar para las escalas pequeñas. En efecto, siguiendo el análisis dimensional,

$$S_p(l_n) = \langle |u_n|^p \rangle \propto \langle \varepsilon \rangle^{p/3} l_n^{p/3} \quad (3.28)$$

Por tanto se trata de un proceso que presenta escalamiento y, en consecuencia, como ya hemos demostrado, resulta autosimilar. Se observa que el valor del exponente de escala  $\zeta_p$  es igual a  $p/3$ .

A partir del análisis multifractal se puede llegar a ese mismo resultado:

La invariancia de escala en sentido estricto conlleva que la fracción de espacio ocupado por los remolinos se mantenga constante, es decir, los remolinos en cada paso de la cascada cubrirán todo el volumen de perturbación generado inicialmente

## Intermitencia de la turbulencia

---

( $p_n = 1$ ). Por tanto, dado que  $P_n \propto l_n^{3-D}$ , bastará con una única estructura fractal cuya dimensión fractal  $D$  será igual a 3.

Recordando la expresión para el exponente de escala para la velocidad,  $h$ , tenemos que

$$h = \frac{1}{3} - \frac{3-D}{3} = \frac{1}{3} \quad (3.29)$$

En consecuencia, la velocidad a una cierta escala resulta

$$u_n \propto u_0 \left( \frac{l_n}{l_0} \right)^{1/3} \quad (3.30)$$

Y dada la relación entre los exponentes de escala para la velocidad y para la tasa de energía transferida ( $h = \alpha/3$ ),  $\alpha$  será igual a 1.

En cuanto a los exponentes de escala de orden  $p$  para las funciones de estructura de la velocidad:

$$\zeta_p = ph = p/3 \quad (3.31)$$

y los exponentes para los momentos de la disipación  $\varepsilon_n$ :

$$\tau_{p/3} = \zeta_p - \frac{p}{3} = 0 \quad (3.32)$$

El espectro multifractal  $f(\alpha)$  se limita a un punto:  $f(1) = 1$ .

El alejamiento de  $\zeta_p$  respecto de la forma lineal con  $p$  es lo que indica el grado de intermitencia existente. En este caso, por tanto, no existe intermitencia.

### 3.3.1.2. Teoría K62 o Modelo log-normal

El modelo anterior no era capaz de reflejar el fenómeno observado de la intermitencia, y por ello se idearon nuevos modelos en los que los exponentes  $\zeta_p$  sí presentarían una forma no lineal con  $p$ .

Así, Kolmogorov (1962) introdujo una hipótesis refinada de semejanza, que relaciona la distribución de probabilidad de las velocidades con la distribución de las tasas de disipación, para una escala determinada. Según esta hipótesis:

$$\langle u_n^p \rangle = \langle \varepsilon_n^{p/3} \rangle l_n^{p/3} \quad (3.33)$$

Si consideramos una dependencia de tipo potencial por parte de la tasa de energía:

$$\langle \varepsilon_n^{p/3} \rangle \propto l_n^{\tau_{p/3}} \quad (3.34)$$

de donde volvemos a obtener la relación entre exponentes de velocidad y energía:

$$\zeta_p = \tau_{p/3} + \frac{p}{3} \quad (3.35)$$

En realidad, el modelo K41 es un caso particular de este modelo, en el que se supone que la distribución de probabilidad de la tasa de disipación es independiente de la escala y, por tanto,  $\langle \varepsilon_n^{p/3} \rangle \propto l_n^{\tau_{p/3}} = 1$ , pues  $\tau_{p/3} = 0$ .

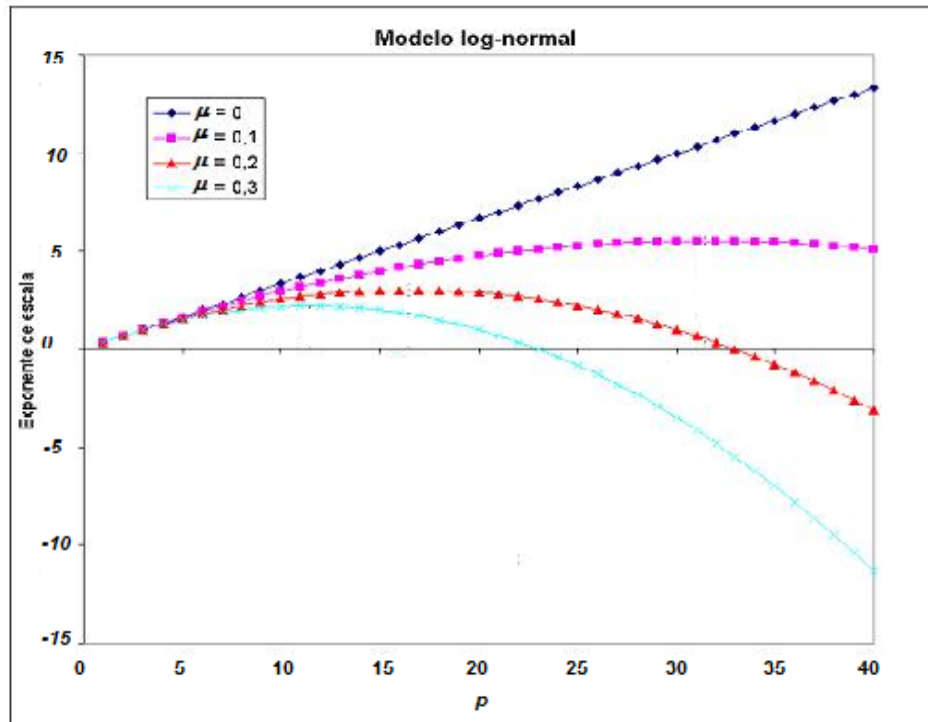
La deducción de los resultados de este modelo, mostrados a continuación, puede encontrarse en el Apéndice IV. Los exponentes de escala para las funciones de estructura de la velocidad de orden  $p$ , y para las funciones de estructura de la disipación de energía de orden  $q$  son los siguientes:

$$\zeta_p = \frac{p}{3} + \frac{\mu p}{18} (3 - p) \quad (3.36)$$

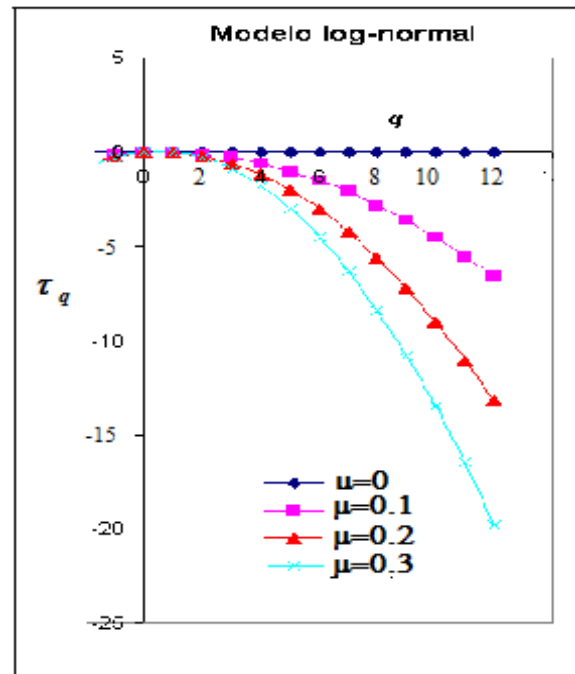


$$\tau_q = \frac{\mu q}{2}(1 - q) \quad (3.37)$$

El parametro  $\mu$  (exponente de intermitencia) sirve para identificar el grado de intermitencia existente conocidos los exponentes de escala de las funciones de estructura ( $\zeta_p$  o  $\tau_q$ ). Por tanto, el exponente de intermitencia se puede calcular a partir de las relaciones anteriores:  $\mu = -\tau_2 = 2 - \zeta_6$ . Cuanto mayor sea  $\mu$ , mayor será esa intermitencia. De hecho, si  $\mu = 0 \Rightarrow \zeta_p = p/3$  y  $\tau_q = 0$  (el modelo se corresponde con la teoría K41, en la que existe ausencia de intermitencia). En las Fig. 3.5 y 3.6 hemos representado esos exponentes de escala para distintos valores del parámetro  $\mu$ :



**Figura 3.5:** Exponentes de escala de las funciones de estructura correspondientes a las velocidades  $v_s$ . orden de las funciones de estructura para el modelo log-normal

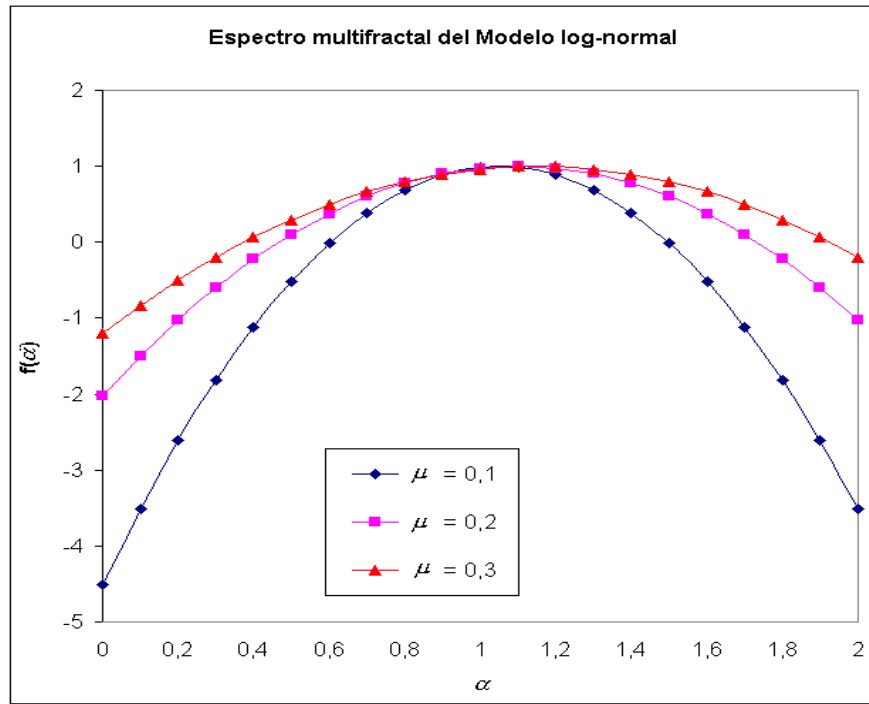


**Figura 3.6:** Exponentes de escala de las funciones de estructura correspondientes a las tasas de disipación de energía  $\tau_q$  vs. orden de las funciones de estructura para el modelo log-normal

En cuanto al espectro multifractal correspondiente a este modelo:

$$f(\alpha) = 1 - \frac{\left(\alpha - 1 - \frac{\mu}{2}\right)^2}{2\mu} \quad (3.38)$$

su representación gráfica se muestra en la Fig. 3.7.



**Figura 3.7:** Espectro multifractal del modelo log-normal

Puede observarse que al aumentar el valor de  $\mu$  el espectro se hace más abierto, cubriendo por tanto un rango más amplio de fractales; en consecuencia, podemos decir que una mayor fractalidad se traduce en una mayor intermitencia.

Este modelo también es conocido por el nombre de modelo log-normal debido a que la distribución de probabilidad seguida por la tasa de disipación  $\varepsilon_n$  sigue una distribución de tipo log-normal.

### 3.3.1.3. Modelo $\beta$

En este modelo (Frisch 1995), la fracción de espacio ocupado por los remolinos de tamaño  $l_n$ ,  $p_n$ , disminuye en un parámetro  $\beta$  ( $0 < \beta < 1$ ). Por tanto, recordando el valor de la probabilidad  $p_n$ :

$$p_n = \beta^n = \left( \frac{l_n}{l_0} \right)^{3-D} \quad (3.39)$$

Como también se supone que la escala disminuye en un factor constante  $r$ :  $l = r^n l_0$   
Despejando de esa expresión,

$$n = \frac{\ln \left( \frac{l_n}{l_0} \right)}{\ln r} \quad (3.40)$$

Luego:

$$3 - D \equiv \frac{\ln \beta}{\ln r} \quad (3.41)$$

El valor de sus exponentes característicos  $h$ ,  $\zeta_p$  o  $\tau_q$  son los ya calculados al estudiar el análisis multifractal:

$$h = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{\ln \beta}{\ln r} \right) \quad (3.42)$$

$$\zeta_p = \frac{p}{3} + \frac{\ln \beta}{\ln r} \left( 1 - \frac{p}{3} \right) \quad (3.43)$$

$$\tau_{p/3} = \frac{\ln \beta}{\ln r} \left( 1 - \frac{p}{3} \right) \quad (3.44)$$

El modelo de Kolmogorov K41 se corresponde con el modelo  $\beta$ , para  $\beta=1$  ( $D=3$ ).

#### 3.3.1.4. Modelo de She-L  v  que

Este modelo (She & L  v  que 1994) supone la existencia de un conjunto de estructuras de disipación con intensidades crecientes. En ese sentido, la intensidad de una estructura de orden  $p$ , a una escala  $l_n$  dentro del rango inercial,  $\epsilon_n^{(p)}$ , se define de la siguiente forma:

$$\epsilon_n^{(p)} = \frac{\langle \epsilon_n^{p+1} \rangle}{\langle \epsilon_n^p \rangle} \quad (3.45)$$

$\epsilon_n^{(p)}$  resulta ser una función monótona creciente de  $p$ , es decir, cuanto mayor es  $p$ , mayor es la intensidad de la estructura singular correspondiente ( mayor es la contribución de esa estructura a la disipación, a la escala considerada).

Las intensidades de las estructuras extremas se definen del siguiente modo:

$$\epsilon_n^{(0)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\langle \epsilon_n^{p+1} \rangle}{\langle \epsilon_n^p \rangle} \quad (3.46.a)$$

$$\epsilon_n^{(\infty)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\langle \epsilon_n^{p+1} \rangle}{\langle \epsilon_n^p \rangle} \quad (3.46.b)$$

Las de orden más bajo  $\epsilon_n^{(0)}$ , resultan iguales a la disipación media:  $\epsilon_n^{(0)} = \langle \epsilon_n \rangle$  que se considera independiente de la escala  $l_n$ . Y en cuanto a las de mayor intensidad, sobre la base de que se pueden expresar como una energía cinética dividida por una escala temporal, se puede llegar a que:

$$\epsilon_n^{(\infty)} \propto l_n^{-\frac{2}{3}} \quad (3.47)$$

Por otra parte, según este modelo, las estructuras de orden  $p+1$  surgen de estructuras singulares menos intensas (de orden  $p$ ), y van a parar a las estructuras de orden infinito. De acuerdo con esto:

$$\varepsilon_n^{(p+1)} \propto \varepsilon_n^{(p)\beta} \varepsilon_n^{(\infty)(1-\beta)} \quad (\text{con } 0 \leq \beta \leq 1) \quad (3.48)$$

A partir de estas consideraciones, y suponiendo también la hipótesis refinada de semejanza de Kolmogorov, She & Lévéque (1994) obtuvieron la siguiente expresión para los exponentes de escala para las funciones de estructura correspondientes a la velocidad y a la tasa de disipación de energía, respectivamente:

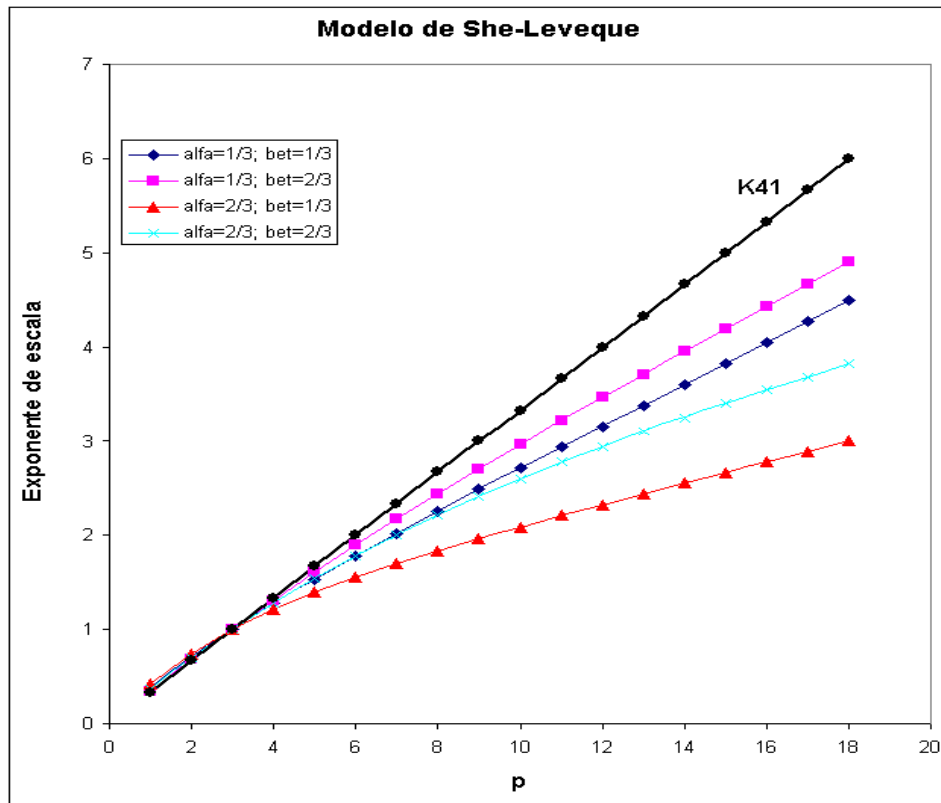
$$\zeta_p = \frac{p}{9} + 2 \left[ 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^{\frac{p}{3}} \right] \quad (3.49)$$

$$\tau_p = -\frac{2}{3}p + 2 \left[ 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^p \right] \quad (3.50)$$

Esta estimación para los exponentes se puede expresar de una forma más general, en función de unos parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , que se ajustan a las especificidades de cada flujo. Así, los exponentes de escala para la velocidad se pueden expresar como:

$$\zeta_p = \frac{p}{3}(1-\alpha) + \alpha \frac{1-\beta^{p/3}}{1-\beta} \quad (3.51)$$

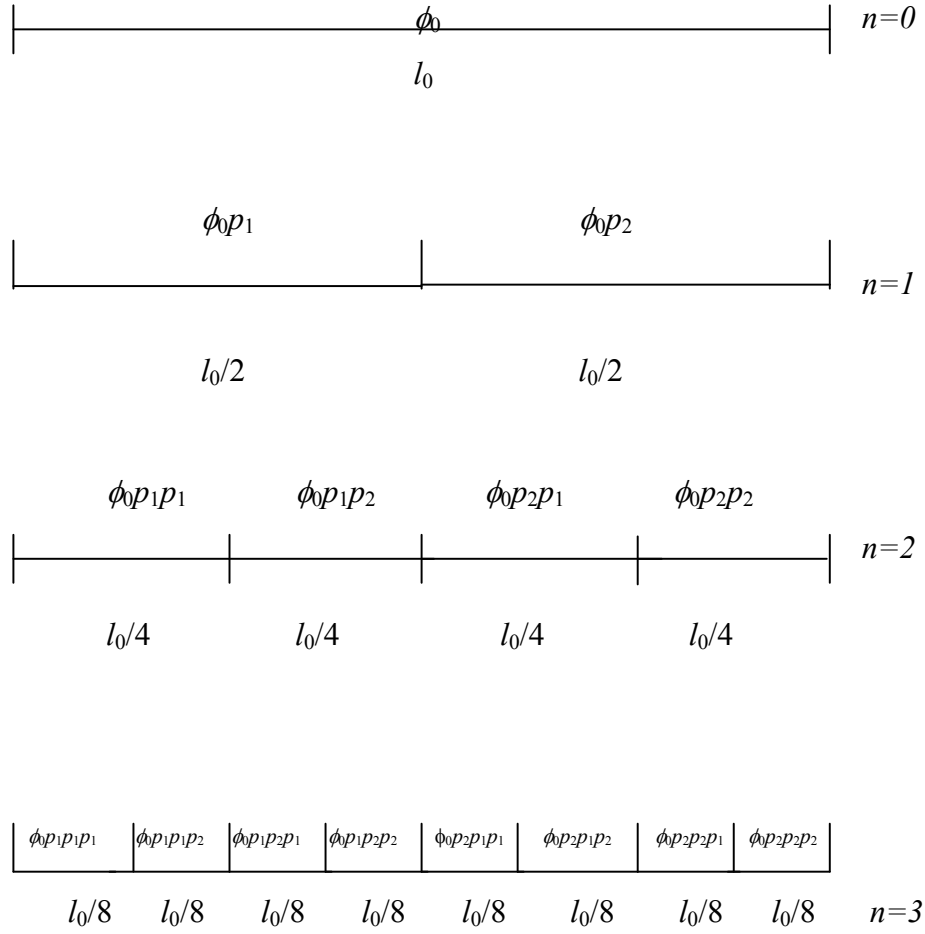
El valor de esos parámetros establece el valor del exponente de escala y, por tanto, la separación respecto de la forma lineal del mismo. Es decir, esos parámetros nos marcan el grado de intermitencia existente. En la Fig. 3.8 se muestran los exponentes de escala para la velocidad correspondientes a varios pares de valores  $\alpha$  y  $\beta$ , frente al orden  $p$  de las funciones de estructura. Haciendo  $\alpha = 0$  obtendríamos el modelo K41.



**Figura 3.8:** Exponentes de escala correspondientes a las funciones de estructura de la velocidad vs. orden de las funciones de estructura para el modelo She-Lévéque

### 3.3.1.5. Modelo $p$ o Modelo binomial

De acuerdo con este modelo (Meneveau & Sreenivasan 1987), la tasa de transferencia de energía en cada paso de la cascada es distinta para cada remolino. Es decir, cada remolino se descompone en dos, pero no da la misma energía a cada uno de ellos: un remolino recibe una fracción de energía  $p$  (y, por tanto, el otro,  $1-p$ ). En este modelo, la fracción de espacio cubierto por los remolinos no disminuye en los distintos pasos. Veamos esto gráficamente en la Fig.3.9:



(donde  $p_1=p$  y  $p_2=1-p$ )

**Figura 3.9:** Esquema de transferencia energética en el modelo  $p$

El número de remolinos de tamaño  $l_n$  (correspondientes al paso  $n$ ) es:  $N_l=l_0/l_n=2^n$

Habida cuenta de ello y, recordando la ecuación (2.9), la función de estructura de orden  $m$  resulta:

$$S_m(l_n) = \left\langle |u_n|^m \right\rangle = \frac{1}{N_n} \sum_{i=1}^{2^n} |u_i|^m = \sum_{i=1}^{2^n} \phi_i^{m/3} l_n^{m/3} l_n / l_0 \quad (3.52)$$

Por otra parte, la tasa de energía transferida al remolino  $i$ -ésimo ( $1 \leq i \leq 2^n$ ) correspondiente al paso  $n$  y, por tanto, de tamaño  $l_n$ , será  $\phi_i = \phi_0 f_i$  (donde  $f_i$  es la fracción de energía correspondiente al remolino  $i$ -ésimo; si esa fracción fuese la



misma para todos los remolinos, tendríamos  $f_i = l_n / l_0$ ). Las fracciones de energía cumplen:

$$\sum_1^{2^n} f_i = [p + (1-p)]^n = 1 \quad (3.53)$$

Por otro lado, utilizando la expansión binomial y las reglas de exponenciación:

$$\sum_1^{2^n} f_i^m = [p^m + (1-p)^m]^n \quad (3.54)$$

Expresión que se puede poner como:

$$[p^m + (1-p)^m]^n = \left( \frac{l_n}{l_0} \right)^{-\log_2 [p^m + (1-p)^m]} \quad (3.55)$$

De acuerdo con lo anterior, veamos ahora el valor de la parte  $\sum_1^{2^n} \phi_i^{m/3} l_n^{m/3}$  de la función de estructura:

$$\begin{aligned} \sum_1^{2^n} \phi_i^{m/3} l_n^{m/3} &= \sum_1^{2^n} f_i^{m/3} \phi_0^{m/3} l_n^{m/3} = [p^{m/3} + (1-p)^{m/3}]^n \sum_1^{2^n} \phi_0^{m/3} l_n^{m/3} = \\ &= \left( \frac{l_n}{l_0} \right)^{-\log_2 [p^{m/3} + (1-p)^{m/3}]} \sum_1^{2^n} \phi_0^{m/3} l_n^{m/3} \propto \left( \frac{l_n}{l_0} \right)^{-\log_2 [p^{m/3} + (1-p)^{m/3}]} \end{aligned} \quad (3.56)$$

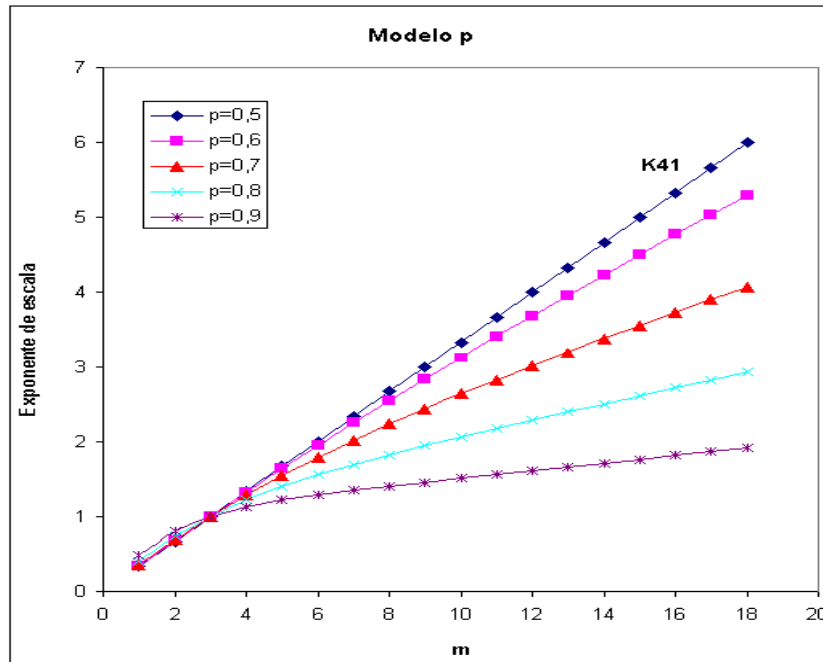
Por tanto, la función de estructura se puede poner como:

$$\begin{aligned} S_m(l_n) &= \sum_1^{2^n} \phi_i^{m/3} l_n^{m/3} \left( \frac{l_n}{l_0} \right) \propto \left( \frac{l_n}{l_0} \right)^{-\log_2 [p^{m/3} + (1-p)^{m/3}]} \left( \frac{l_n}{l_0} \right) = \\ &= \left( \frac{l_n}{l_0} \right)^{1 - \log_2 [p^{m/3} + (1-p)^{m/3}]} \end{aligned} \quad (3.57)$$

De donde, los exponentes de escala de las funciones de estructura de la velocidad serán:

$$\zeta_m = 1 - \log_2(p^{m/3} + (1-p)^{m/3}) \quad (3.58)$$

En este caso, el valor del parámetro  $p$  es el que nos indica el grado de intermitencia existente. Si hacemos  $p=0.5$ , tendríamos el modelo K41. En ese caso la energía de cada remolino se transfiere por igual a los dos remolinos en que se descompone. Con  $p=1$ , tendríamos el caso de máxima intermitencia. Un valor típico para  $p$  suele ser entre 0.7 y 0.8. En la Fig. 3.10 hemos representado los exponentes de escala para algunos valores del parámetro  $p$ , observándose como al aumentar el valor del parámetro desde su valor menor (0.5), el alejamiento respecto de la forma lineal es cada vez mayor (es decir, cada vez es mayor la intermitencia).



**Figura 3.10:** Exponentes de escala vs. orden de las funciones de estructura para el modelo  $p$

### 3.3.1.6. Modelo de difusión

Este modelo sostiene que los vórtices turbulentos evolucionan a lo largo del tiempo de un estado a otro siguiendo un proceso de Markov, es decir, un proceso sin

memoria. Recordemos, en primer lugar, que un proceso de Markov es un proceso estocástico que cumple:

$$P(u_n, t_n / u_1, t_1; \dots; u_{n-1}, t_{n-1}) = P(u_n, t_n / u_{n-1}, t_{n-1}) \quad (3.59)$$

Es decir, la probabilidad de que el incremento de velocidad  $u$  se encuentre en el estado  $u_n$  en el momento  $t_n$ , habiendo estado en el estado  $u_1$  en el momento  $t_1$ , ....., en el estado  $u_{n-1}$  en el momento  $t_{n-1}$  es la misma que si sólo se considera el estado  $u_{n-1}$  para el momento  $t_{n-1}$ . Por tanto, el sistema no tiene memoria: lo que ocurra para escalas más pequeñas sólo depende de la escala actual.

Un proceso de Markov verifica la llamada Ecuación de Chapman-Kolmogorov (Risken 1984):

$$P(u_3, t_3 / u_1, t_1) = \int P(u_3, t_3 / u_2, t_2) P(u_2, t_2 / u_1, t_1) du_2 \quad (3.60)$$

Esa ecuación se puede expresar en forma diferencial por medio de la expansión de Kramers-Moyal (formalmente es equivalente a la ecuación maestra) (Risken 1984, Marcq & Naert 1998):

$$\frac{\partial P(u, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial u^n} (D_n(u, t) P(u, t)) \quad (3.61)$$

donde  $D_n$  son los coeficientes de Kramers-Moyal, definidos como:

$$D_n(u, t) = \lim_{t \rightarrow t'} M_n(u, t, t') \quad (3.62)$$

Los coeficientes  $M_n$  son los correspondientes momentos de orden  $n$ , es decir:

$$M_n(u, t, t') = \frac{1}{t - t'} \frac{1}{n!} \int (u' - u)^n P(u', t' / u, t) du' \quad (3.63)$$

## Intermitencia de la turbulencia

---

Despreciando los coeficientes de orden mayor que 2, obtenemos la Ecuación de Fokker-Planck (Risken 1984):

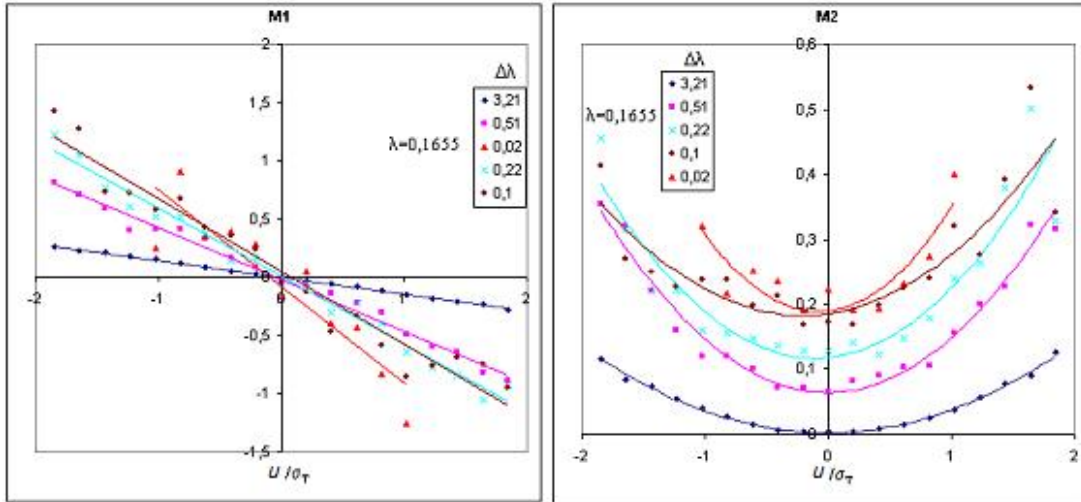
$$\frac{\partial P(u,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial u}(D_1(u,t)P(u,t)) + \frac{\partial^2}{\partial u^2}(D_2(u,t)P(u,t)) \quad (3.64)$$

En Renner *et al.* (2001) se muestra que esa ecuación describe correctamente las funciones de densidad medidas experimentalmente.

Los términos de la derecha de la ecuación (3.64) se denominan término de transporte ( $D_1$  es el coeficiente de transporte o coeficiente *drift*) y término de difusión (siendo  $D_2$  el coeficiente de difusión).

En cuanto a la determinación de dichos coeficientes, el primer paso consiste en calcular los momentos  $M_1$  y  $M_2$ , de acuerdo con la expresión (3.63). Sin embargo, dada la dependencia de estos coeficientes con  $1/t$ , siguiendo a Renner *et al.* (1999) haremos el siguiente cambio de variable:  $\lambda = \ln(T/t)$ , siendo  $T$  la escala integral. Por tanto, para cada terna  $(u, \lambda, \lambda')$ , o lo que es lo mismo, para cada  $(u, \lambda, \Delta\lambda)$ , donde  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ , tendremos un valor para  $M_1$  y  $M_2$ .

Pues bien, fijados  $\lambda$  y  $\Delta\lambda$ ,  $M_1$  sigue una dependencia aproximadamente lineal respecto a las variaciones de velocidad, en tanto que  $M_2$  sigue una dependencia, también de forma aproximada, cuadrática (Fig. 3.11).



**Figura 3.11:**  $M_1$  y  $M_2$  vs. velocidad (normalizada por la varianza), para diferentes valores de  $\Delta\lambda$ , con  $\lambda=0.165$  (Resultados obtenidos con los datos de la campaña SABLES98 correspondientes al día 14 de septiembre a las 00:00 GMT)

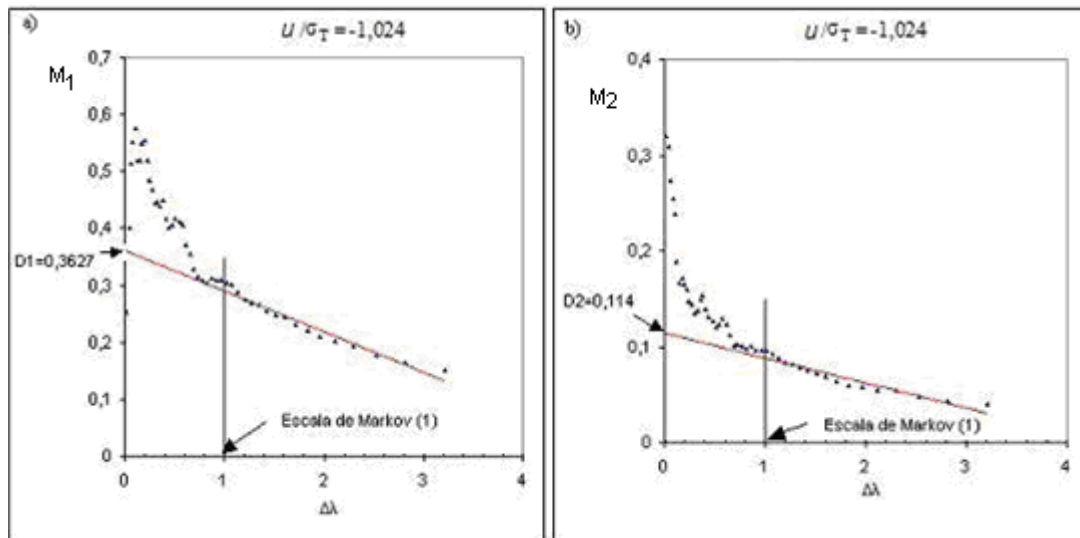
La Fig. 3.11 se ha obtenido a partir de los datos correspondientes a la campaña SABLES98; concretamente, la figura es el resultado de la velocidad del viento medido el día 14 de septiembre a las 00:00 GMT en la campaña mencionada. En las gráficas hemos añadido los ajustes lineal y cuadrático para mostrar la dependencia de la que hablábamos entre los momentos y las variaciones de velocidad ( $M_1$ , dependencia lineal y  $M_2$ , cuadrática). Hemos restringido la representación al intervalo de variaciones de velocidad entre  $(-2,2)$ , puesto que para valores mayores aparece una mayor dispersión. También se aprecia en las gráficas cómo al disminuir  $\Delta\lambda$  aumenta la dispersión.

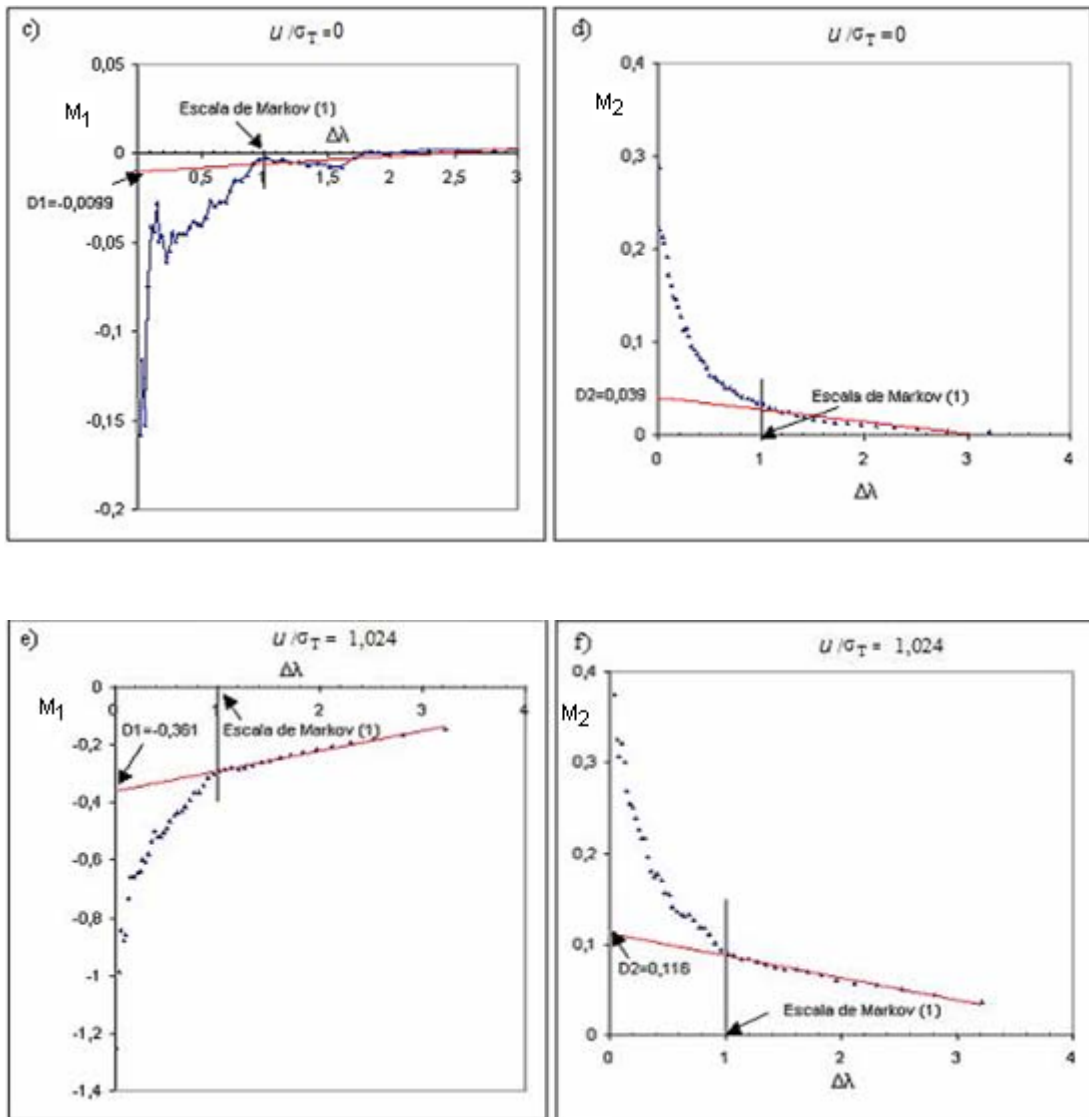
A continuación, ya se pueden calcular los coeficientes  $D_1$  y  $D_2$ . Sin embargo, este cálculo presenta la dificultad de determinar el límite de los momentos  $M_1$  y  $M_2$  (Renner *et al.* 1999). Por ello, es necesario determinar la llamada escala de Markov (Ghasemi *et al.* 2005) (se trata de la escala por encima de la cual, el proceso resulta markoviano). Dicha escala, de acuerdo con Lind *et al.* (2007), se puede estimar teniendo en cuenta que para escalas superiores a ella, los valores de  $M_1$  y  $M_2$  siguen de forma aproximada una variación lineal con el tiempo.

## Intermitencia de la turbulencia

Por tanto, la forma de determinar  $D_1$  y  $D_2$  consiste en extrapolar, hasta el corte con el origen, los momentos  $M_1$  y  $M_2$  correspondientes a incrementos temporales mayores a la escala de Markov.

En la Fig. 3.12 hemos representado (a partir de los  $M_1$  y  $M_2$  obtenidos con anterioridad para datos de la campaña SABLES98), para un determinado  $\lambda$  (igual a 0.165) y para distintas velocidades, la forma de determinar la escala de Markov y los coeficientes *drift* ( $D_1$ ) y difusión ( $D_2$ ) y podemos observar que a partir de un determinado valor de  $\Delta\lambda$ ,  $M_1$  y  $M_2$  siguen un comportamiento aproximadamente lineal. Ese valor de  $\Delta\lambda$  se corresponde con la escala de Markov. Según el incremento de velocidad considerado,  $u/\sigma_T$ , el valor de la escala de Markov puede diferir (se observa que, por ejemplo, para  $u/\sigma_T = -1.024$ , podríamos fijar el inicio del comportamiento lineal en una escala más pequeña). Por ello, para considerar un único valor para esa escala (para un determinado  $\lambda$ ), independientemente del incremento de velocidad, asignaremos una escala que resulte válida para todos los casos ( $\Delta\lambda=1$ ).





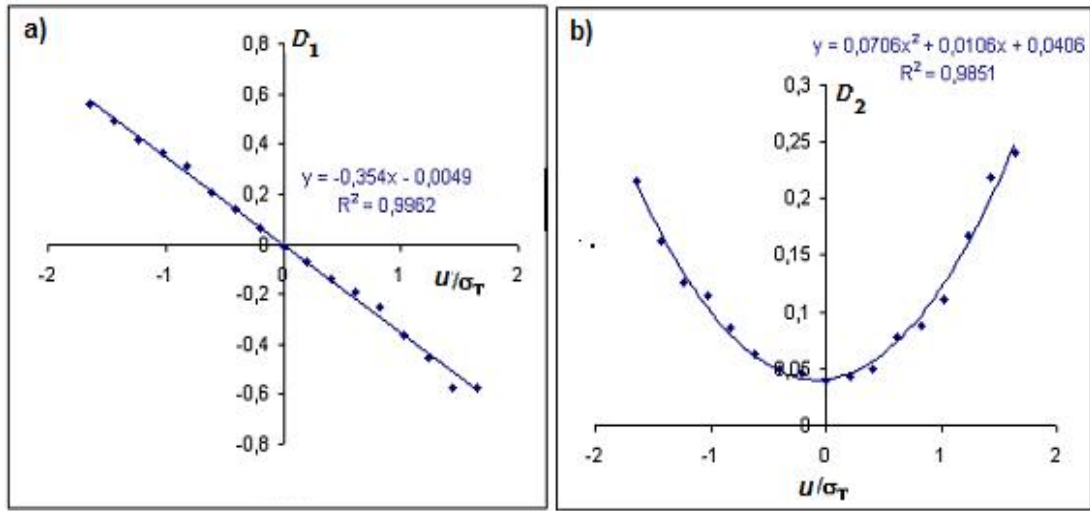
**Figura 3.12:** Determinación de la escala de Markov y de los coeficientes  $D_1$  y  $D_2$  para distintas velocidades, con  $\lambda$  fijo igual a 0.165 (Resultados obtenidos a partir de los  $M_1$  y  $M_2$  calculados con datos de la campaña SABLES98 (el día 14 de septiembre a las 00:00 GMT); para todos los casos, y en aras de facilitar el cálculo posterior, hemos considerado que la escala de Markov se podía suponer igual para todos los casos)

Para otros valores de  $\lambda$  la escala de Markov puede variar. Sin embargo, cuando  $\lambda$  disminuye es necesario ir disminuyendo también la escala de Markov. Cuando la escala es menor, más rápidamente se pierde la memoria del proceso.

## Intermitencia de la turbulencia

Para obtener el límite cuando  $\Delta\lambda$  tiende a cero de  $M_1$  y  $M_2$ , tan solo habrá que extrapolar hasta el corte con el eje de ordenadas la recta de ajuste de los  $M_1$  y  $M_2$  para  $\Delta\lambda$  superiores a 1. Esos límites son los coeficientes  $D_1$  y  $D_2$ .

La Fig. 3.13 muestra los valores de  $D_1$  y  $D_2$  para una escala determinada (concretamente, para  $\lambda=0.165$ ) en función de los incrementos de velocidad.



**Figura 3.13:** a)  $D_1$  vs. velocidad (normalizada); b) coeficiente  $D_2$  vs. velocidad (normalizada); con  $\lambda=0.165$  (Datos de SABLES correspondientes al día 14 de septiembre a las 00:00 GMT)

Por tanto, los coeficientes *drift* y difusión responden a la forma:

$$D_1(u, t) = -\gamma(t)u \quad (3.65.a)$$

$$D_2(u, t) = \alpha(t) - \delta(t)u + \beta(t)u^2 \quad (3.65.b)$$

Introduciendo la función de estructura,  $S_p(t)$ , en la ecuación de Fokker-Planck, tenemos:

$$-t \frac{\partial}{\partial t} S_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u^p \left[ -\frac{\partial}{\partial u} D_1(u, t) + \frac{\partial^2}{\partial u^2} D_2(u, t) \right] P(u, t) du \quad (3.66)$$



## Intermitencia de la turbulencia

---

Cuando  $Re \rightarrow \infty$  los coeficientes  $\alpha(t)$  y  $\delta(t)$  resultan despreciables (Renner *et al.* 2002), por lo que, sustituyendo  $D_1(u,t)$  y  $D_2(u,t)$  por su expresión en la ecuación anterior (Lück 2001):

$$-t \frac{\partial}{\partial t} S_p(t) = (-\gamma p + \beta p(p-1)) S_p(t) \quad (3.67)$$

Expresando la función de estructura de acuerdo con el exponente de escala podemos obtener el valor de dicho exponente (Lück 2001) en función de  $\gamma$  y  $\beta$ .

$$\zeta_p = (\gamma - 2\beta) p - \beta p(p-3) \quad (3.68)$$

Recordando la expresión que, por ejemplo, proporciona el modelo log-normal para los exponentes de escala (ecuación (3.36)), podemos expresar el valor de los coeficientes  $\beta$  y  $\gamma$  en función del parámetro de intermitencia  $\mu$ :

$$\beta = \frac{\mu}{18} \quad (3.69)$$

$$\gamma = \frac{1}{3} + 2\beta \quad (3.70)$$

De esta manera, se ha logrado relacionar la intermitencia con los parámetros correspondientes al modelo de difusión. De acuerdo con las expresiones (3.69) y (3.70), situaciones con ausencia de intermitencia ( $\mu = 0$ ) resultarán modelizadas por los valores  $\beta = 0$  y  $\gamma = 1/3$ . Conforme aumenta la intermitencia (mayores valores de  $\mu$ ),  $\beta$  y  $\gamma$  deben ser mayores.

### 3.3.2. Turbulencia no homogénea

#### 3.3.2.1. Modelos *shell*

Los modelos *shells* constan de un conjunto de ecuaciones obtenidas a partir de la ecuación de Navier-Stokes en el espacio de Fourier, a cuyo fin, dicho espacio se

## Intermitencia de la turbulencia

---

considera dividido en un conjunto de *shells*. En el Apéndice V se muestra la obtención de la ecuación de Navier-Stokes en el espacio de Fourier a partir de su expresión en el espacio físico.

El modelo *shell* quizá más importante es el debido a Gledzer-Ohkitani-Yamada (GOY), versión reciente del modelo Gledzer (Gledzer 1973), debido a Yamada & Ohkitani (1987) y que expresa la ecuación de Navier-Stokes en el espacio de Fourier de la siguiente forma (el subíndice  $n$  hace referencia al  $n$ -ésimo *shell*):

$$\left( \frac{d}{dt} + \nu k_n^2 \right) u_n = i(a_n u_{n+1} u_{n+2} + b_n u_{n-1} u_{n+1} + c_n u_{n-1} u_{n-2})^* + f_n \quad (3.71)$$

donde  $\nu$  representa la viscosidad cinemática,  $u_n$  la velocidad en el  $n$ -ésimo *shell* ( $u_n = 0$  para  $n \leq 0$ ),  $k_n$  los correspondientes números de onda (se supone que escalan geométricamente, por tanto,  $k_n = k_0 q^n$ , siendo  $q$  la razón de la serie geométrica), y los  $f_n$  términos de forzamiento (si el forzamiento se considera, por ejemplo, en el cuarto modo,  $f_n = f \delta_{4,n}$ ).

Y con respecto al resto de coeficientes:

$$a_n = a k_n = a k_0 q^n \quad (3.72.a)$$

$$b_n = b k_{n-1} = b k_0 q^{n-1} \quad (3.72.b)$$

$$c_n = c k_{n-2} = c k_0 q^{n-2} \quad (3.72.c)$$

Por tanto, los seis parámetros que definen este modelo son:  $k_0$ ,  $q$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $f$ .

Como valores habituales para algunos de estos parámetros (Kadanoff *et al.* 1995), se suelen considerar los siguientes:

$$k_0 = 1/16; a = 1; q = 2; f = 5(1+i)10^{-3} \quad (3.73)$$

## Intermitencia de la turbulencia

---

En caso de no forzamiento y falta de viscosidad, el modelo GOY tiene dos invariantes (Ditlevsen & Mogensen 1996, Ditlevsen 2004),  $E$  y  $H$ , con las siguientes expresiones:

$$E = \frac{1}{2} \sum_n |u_n|^2 \quad (3.74)$$

y

$$H = \frac{1}{2} \sum_n (-1)^n k_n^p |u_n|^2 \quad (\text{con } p = -\log_q |\delta - 1|). \quad (3.75)$$

El primer invariante corresponde a la energía, siendo necesario para esa invariancia que:  $a+b+c=0$ ; esto hace que  $b$  y  $c$  se puedan obtener a partir de un único parámetro, que denominaremos  $\delta$ , de tal forma que:  $b=-\delta$  y  $c = \delta-1$  (tomando  $a=1$ )

Respecto al segundo invariante, si  $\delta < 1$ , entonces  $H$  es definido no positivo y, por el contrario, si  $\delta > 1$ ,  $H$  es definido positivo. Cuando  $H$  es definido no positivo ( $\delta < 1$ ) y  $p=1$ , ese invariante se corresponde con la helicidad, y su conservación implica que estamos en turbulencia 3D, como ya mencionamos en el apartado 2.5. Por el contrario, cuando es positivo ( $\delta > 1$ ) y  $p=2$ , ese invariante es la enstrofia, y su conservación implica que estamos en turbulencia 2D.

Por tanto, si consideramos turbulencia 3D, para el valor indicado de  $q$  (2),  $\delta$  deberá ser igual a  $1/2$ , y, en consecuencia tendremos:  $b= -1/2$  y  $c= -1/2$ . Para el caso de la turbulencia 2D, y con el mismo  $q$ ,  $\delta$  debe ser  $5/4$ .

En términos más generales, cuando  $a = 1$  (para un  $a$  genérico ver Constantin *et al.* 2007) si  $\delta$  es mayor que 1, la turbulencia es 2D, pues el segundo invariante es positivo y por tanto se corresponde con la enstrofia. Por el contrario, si  $\delta$  es menor que 1, ese invariante es no positivo, al igual que la helicidad, y por tanto nos encontramos en turbulencia 3D (Ditlevsen 1996). Este punto crítico, en el que el flujo de energía cambia de signo y el flujo de helicidad diverge puede verse en Giuliani *et al.* (2002).

En cuanto a la función de estructura para estos modelos, viene definida por:

$$S_p(n) = \langle |u_n|^p \rangle \quad (3.76)$$

teniéndose que, en el rango inercial:

$$S_p(n) \propto k_n^{-\zeta_p} \quad (3.77)$$

### Simulaciones numéricas

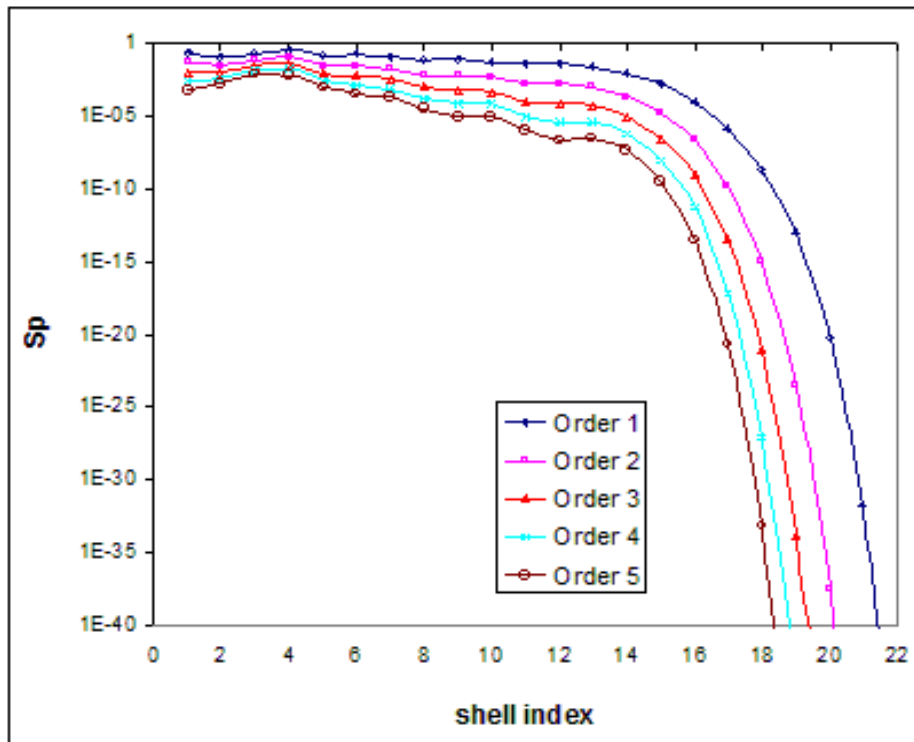
A modo ilustrativo, en esta tesis hemos llevado a cabo una implementación numérica (Vindel & Yagüe 2009) de estos modelos utilizando una discretización temporal. Para ello, siguiendo a Pisarenko *et al.* (1993) emplearemos un esquema de Adams-Bashforth de segundo orden para resolver la ecuación:

$$u_n(t + \delta t) = e^{-\nu k_n^2 \delta t} u_n(t) + \frac{1 - e^{-\nu k_n^2 \delta t}}{\nu k_n^2} \left( \frac{3}{2} g_n(t) - \frac{1}{2} g_n(t - \delta t) \right) \quad (3.78)$$

donde  $g_n(t)$  es el lado derecho de la expresión (3.71).

Para resolver esa ecuación, asegurando estabilidad de integración y resultados consistentes, se han considerado las siguientes condiciones: 22 *shells*, una viscosidad,  $\nu$  con un valor de  $1.8 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  (valor característico del aire atmosférico) y un número total de pasos de  $4 \times 10^4$ .

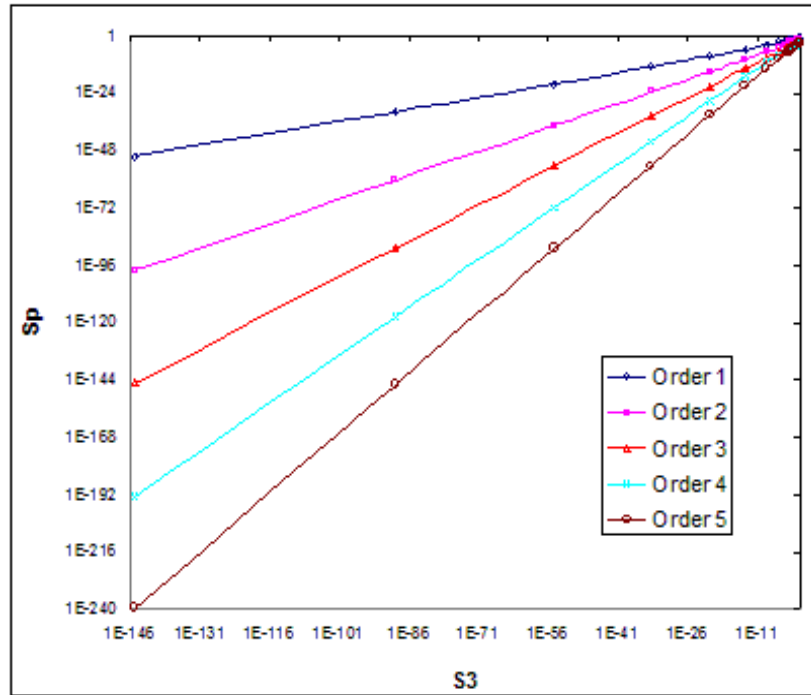
Tomando para los parámetros  $k_0$ ,  $q$ ,  $a$  y  $f$  los valores indicados en (3.73), un salto temporal,  $\delta t$ , de  $10^{-3}$  u.t., y haciendo  $\delta = 1/2$ , hemos obtenido la Fig. 3.14, representativa de las funciones de estructura (en escala logarítmica) frente al índice *shell*.



**Figura 3.14:** Funciones de estructura (escala logarítmica) vs. índice del *shell*

Las pendientes de esas graficas corresponden a los exponentes de escala. En el *shell* número 4, donde se ha introducido el forzamiento, se observa un máximo, y en torno al *shell* número 15 se produce un importante cambio en las pendientes de todas las gráficas.

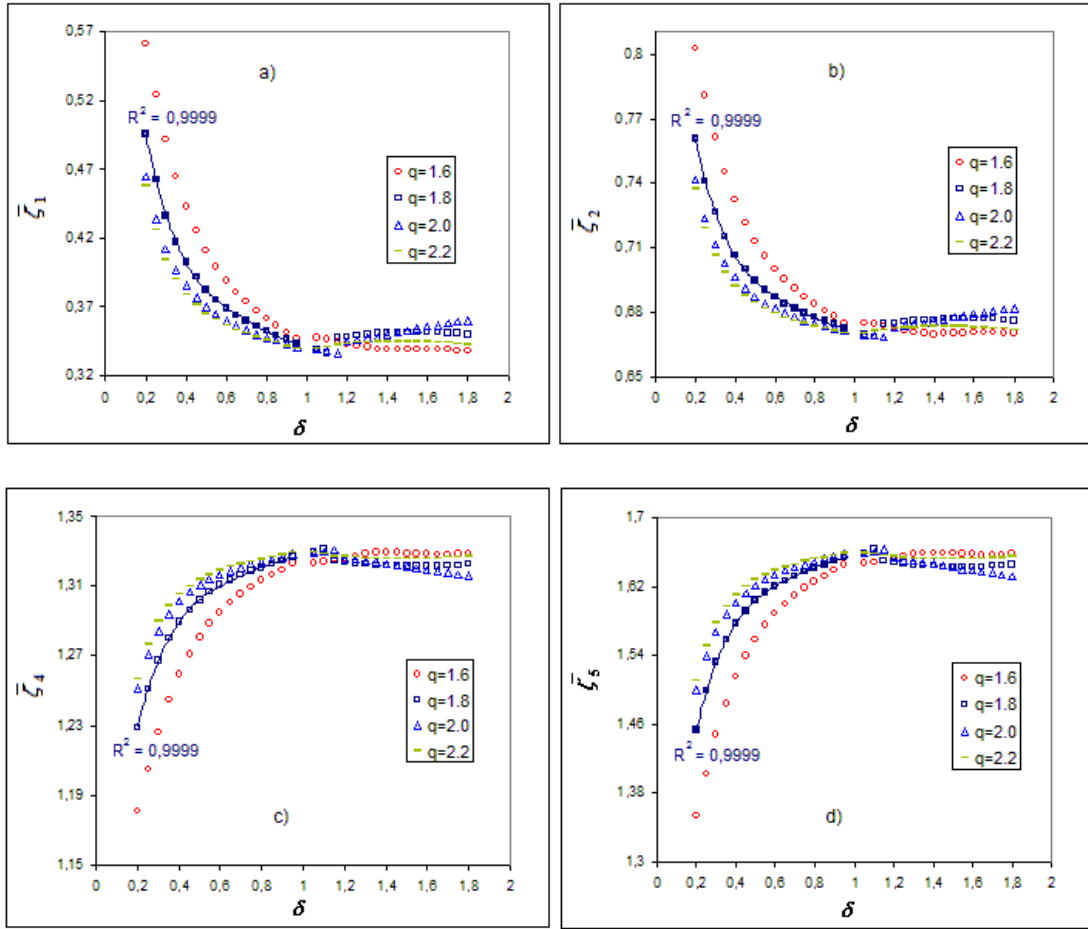
Con anterioridad ya habíamos introducido los llamados exponentes de escala relativos, que presentan un mejor cumplimiento de la relación potencial. Por ello, a continuación (Fig. 3.15) hemos representado el logaritmo de las funciones de estructura frente al logaritmo de la función de estructura de orden 3. Se observa una perfecta relación lineal, que indica la existencia de una relación potencial entre las funciones de estructura de todos los órdenes y la de orden 3 (ecuación (3.23)).



**Figura 3.15:** Funciones de estructura de diferentes órdenes (escala logarítmica vs. función de estructura de orden 3 (escala logarítmica))

Dado el excelente cumplimiento de la relación potencial utilizando la condición ESS, utilizaremos los exponentes de escala relativos para analizar la intermitencia presente en los modelos *shells*. Para ello, estimaremos la dependencia de esos exponentes relativos al modificar el valor de los parámetros característicos,  $q$  y  $\delta$ , de un modelo GOY (Bowman *et al.* 2006). El resto de parámetros del modelo mantendrán los valores ya mencionados. El parámetro  $\delta$  variara entre 0.2 y 1.8, excepto el valor 1, a intervalos de 0.05; por su parte, variaremos  $q$  entre 1.6 y 2.4 a intervalos de 0.1.

Utilizando en este caso una simulación con un salto temporal de  $10^{-3}$  y únicamente 11 *shells* (ya que hay situaciones en las que, para más *shells*, las funciones de estructura se vuelven nulas, haciendo imposible la estimación de su logaritmo) hemos obtenido la Fig. 3.16, donde se representan los exponentes de escala relativos en función del parámetro  $\delta$  para diferentes valores del parámetro  $q$ .



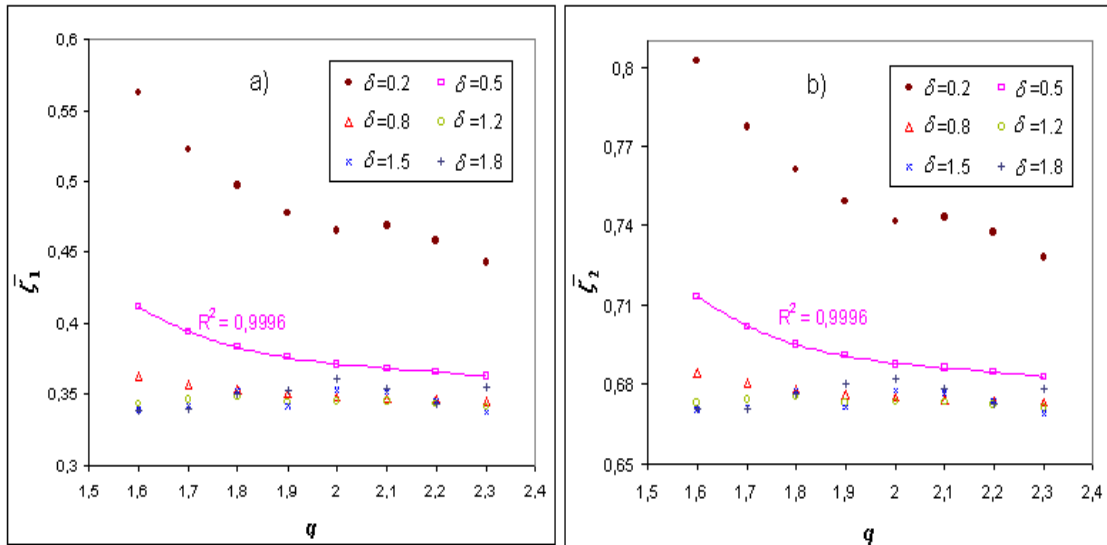
**Figura 3.16:** Exponentes de escala relativos vs.  $\delta$  para diferentes valores del parámetro  $q$  para: a) orden 1, b) orden 2, c) orden 4 y d) orden 5. Una línea continua representa el polinomio de ajuste de orden 4 para  $q = 1.8$  (también se muestra el coeficiente de determinación).

En la Fig. 3.16 se observa el *gap* entre la turbulencia 2D y la 3D, correspondiente, precisamente, al valor 1 para  $\delta$ . Este punto crítico coincide con el valor para el cual el segundo invariante es positivo o no. En la región 3D ( $\delta < 1$ ), los exponentes de escala disminuyen, si el orden de las funciones de estructura es menor que 3, o aumentan, si ese orden es superior a 3, al aproximarse al área 2D. En el área 3D se puede establecer, con un alto coeficiente de correlación, una relación funcional entre los exponentes relativos y  $\delta$ . Así, por ejemplo, para  $q=1.8$ :

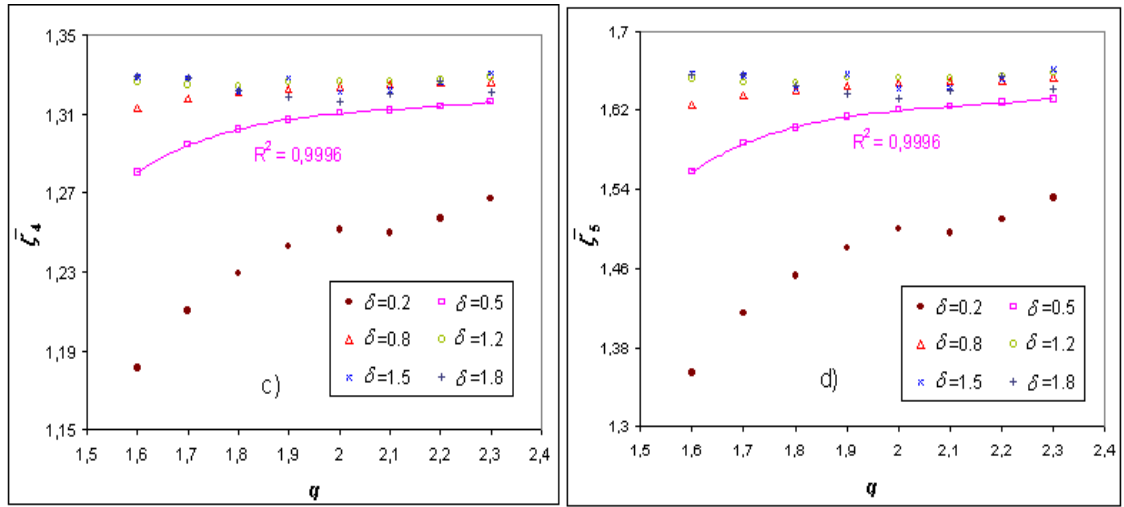
$$\begin{aligned}
 \bar{\zeta}_1 &= 0.9586 \delta^4 - 2.8408 \delta^3 + 3.2006 \delta^2 - 1.7048 \delta + 0.7298 \\
 \bar{\zeta}_2 &= 0.56 \delta^4 - 1.6593 \delta^3 + 1.8686 \delta^2 - 0.9935 \delta + 0.8968 \\
 \bar{\zeta}_4 &= -0.623 \delta^4 + 1.8471 \delta^3 - 2.0809 \delta^2 + 1.1054 \delta + 1.078 \\
 \bar{\zeta}_5 &= -1.2776 \delta^4 + 3.7892 \delta^3 - 4.2701 \delta^2 + 2.2684 \delta + 1.143
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

Sin embargo, en la región 2D ( $\delta > 1$ ) los exponentes presentan un valor bastante constante y lineal, independientemente del valor de  $\delta$ . Se observa que en ese área el valor de los exponentes de escala se corresponde prácticamente con el valor de la recta  $\bar{\zeta}_p = p / 3$ , es decir, se trata de una región caracterizada por la previsible disminución de la intermitencia (Smith & Yakhot 1993, Paret & Tabeling 1998).

De forma similar a como hemos actuado con anterioridad, es posible fijar el parámetro  $\delta$  y observar la variación de los exponentes de escala relativos al variar el parámetro  $q$ . En la Fig. 3.17 se muestra este análisis.





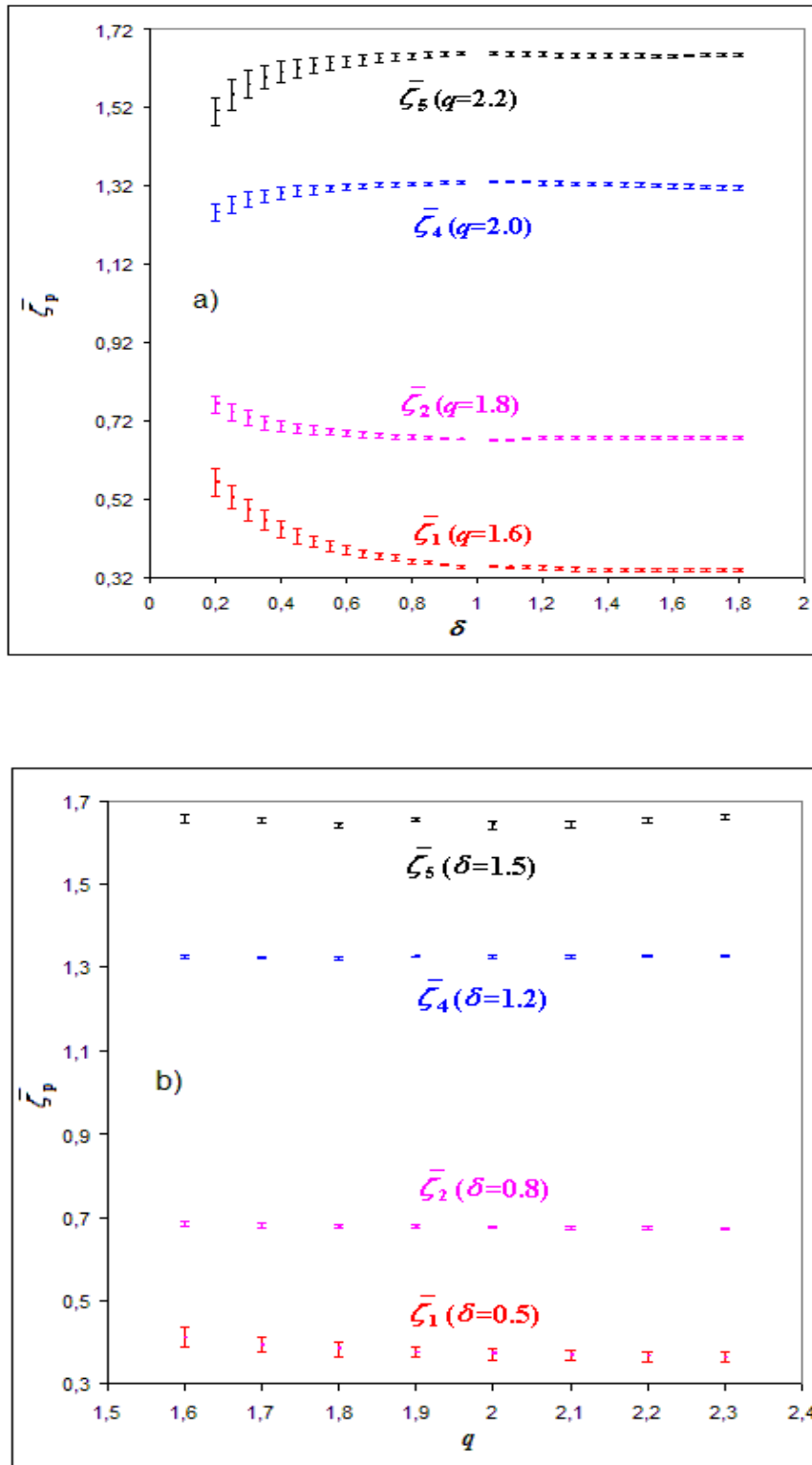


**Figura 3.17:** Exponentes de escala relativos vs.  $q$  para diferentes valores del parámetro  $\delta$  para: a) orden 1, b) orden 2, c) orden 4 y d) orden 5. Una línea continua representa el polinomio de ajuste de orden 4 para  $\delta = 0.5$  (también se muestra el coeficiente de determinación)

Para  $\delta < 1$  (turbulencia 3D) se puede, al igual que antes, establecer una relación funcional entre los exponentes de escala y  $q$ . Así, por ejemplo, para  $\delta = 0.5$ :

$$\begin{aligned}
 \bar{\zeta}_1 &= 0.0657 q^4 - 0.7293 q^3 + 2.8711 q^2 - 4.8708 q + 3.4109 \\
 \bar{\zeta}_2 &= 0.0759 q^4 - 0.7358 q^3 + 2.6367 q^2 - 4.1659 q + 3.1454 \\
 \bar{\zeta}_4 &= -0.1136 q^4 + 1.0586 q^3 - 3.6741 q^2 + 5.65 q - 1.9455 \\
 \bar{\zeta}_5 &= -0.2487 q^4 + 2.3005 q^3 - 7.9325 q^2 + 12.13 q - 5.3347
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

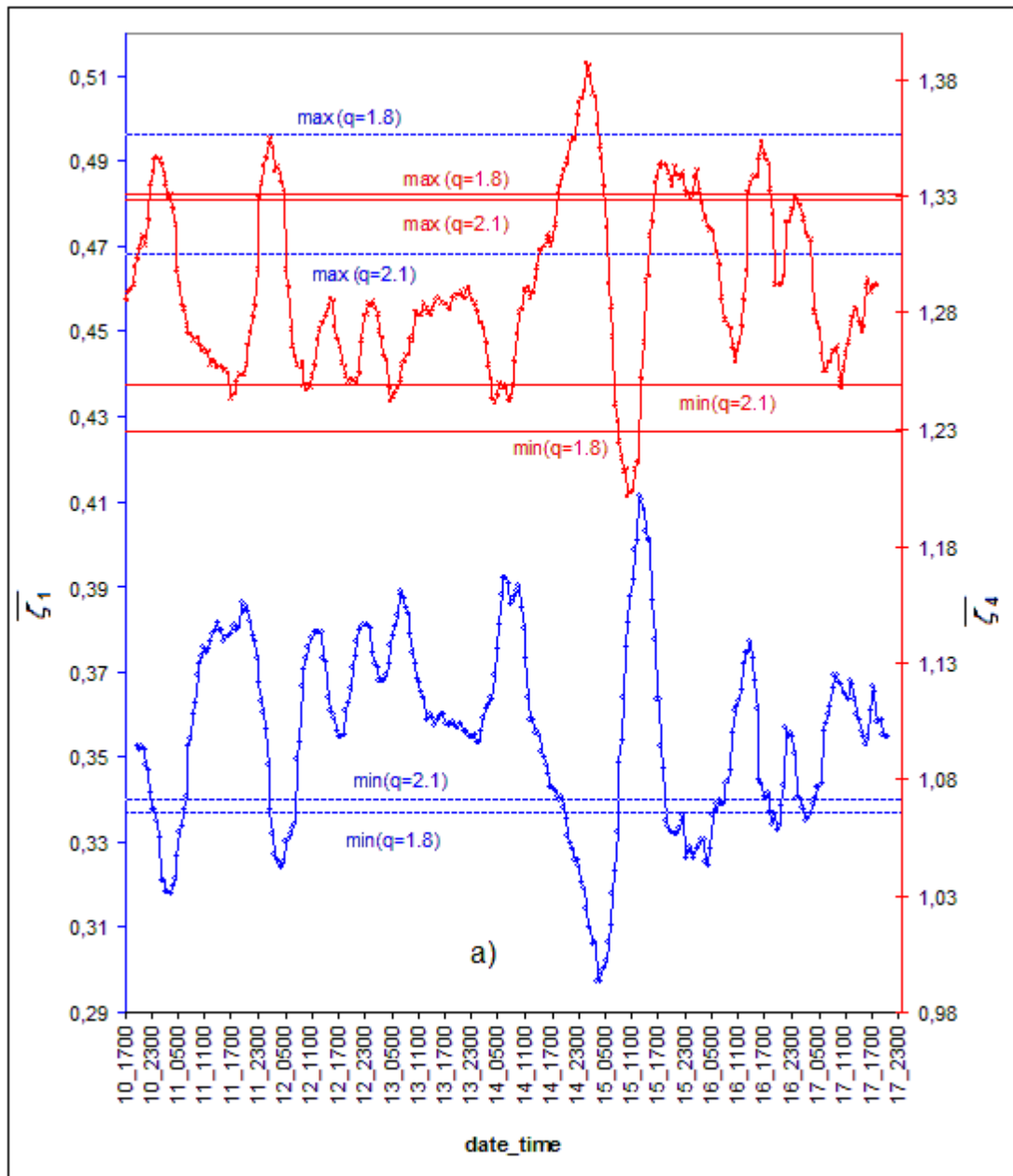
Para tener una idea del grado de incertidumbre existente en las figuras previas, en la Fig. 3.18 hemos representado algunos ejemplos con las barras de errores (con un intervalo de confianza del 99%). La Fig. 3.18a muestra que la incertidumbre aumenta cuando  $\delta$  disminuye (aproximadamente a partir de 0.8); sin embargo, el parámetro  $q$  (Fig. 3.18b) no afecta mucho al grado de incertidumbre existente.

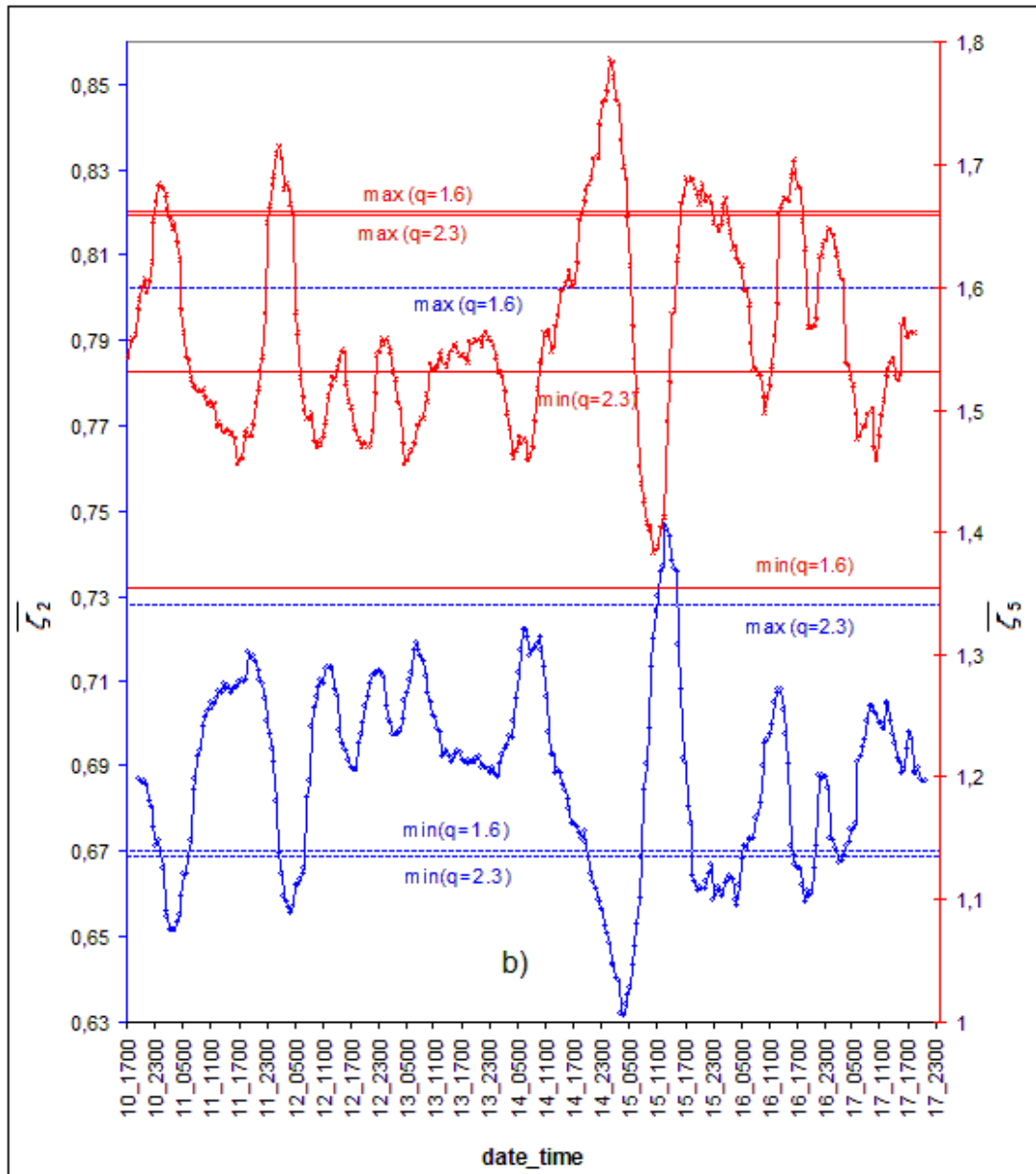


**Figura 3.18:** a) Exponentes de escala relativos vs.  $\delta$  (para diferentes valores de  $q$ ) con barras de errores; b) Exponentes de escala relativos vs.  $q$  (para diferentes valores de  $\delta$ ) con barras de errores

En cualquier caso, cuanto más se aleja el orden de 3, mayor es el grado de incertidumbre que presentan los exponentes relativos.

Con objeto de mostrar la posible aplicación del modelo GOY a datos atmosféricos, vamos a representar los exponentes de escala relativos obtenidos a partir de datos correspondientes a la campaña SABLES98 (Cuxart *et al.* 2000), llevada a cabo en la provincia de Valladolid en 1998. Con posterioridad indicaremos con detalle cuáles han sido los datos de esa campaña empleados para realizar los cálculos que se muestran en la tesis. En la Fig. 3.19 aparecen los resultados correspondientes al periodo que va desde el día 10 de septiembre de 1998 a las 17:00 GMT, hasta el día 17 de septiembre a las 23:30 GMT, analizado a intervalos de media hora, lo que supone el cálculo para 350 situaciones diferentes. En esas situaciones de estudio se presentan condiciones de estabilidad de estratificación muy diferentes, como también veremos en el siguiente capítulo, desde una fuerte convección diurna a noches fuertemente estables. En la Fig. 3.19, también hemos incluido los valores máximo y mínimo de los exponentes de escala relativos para ciertos valores del parámetro  $q$  del modelo GOY. Debemos indicar que para hacer más clara la representación, las curvas se han modulado utilizando una media móvil de orden 12, es decir, de 6 horas.



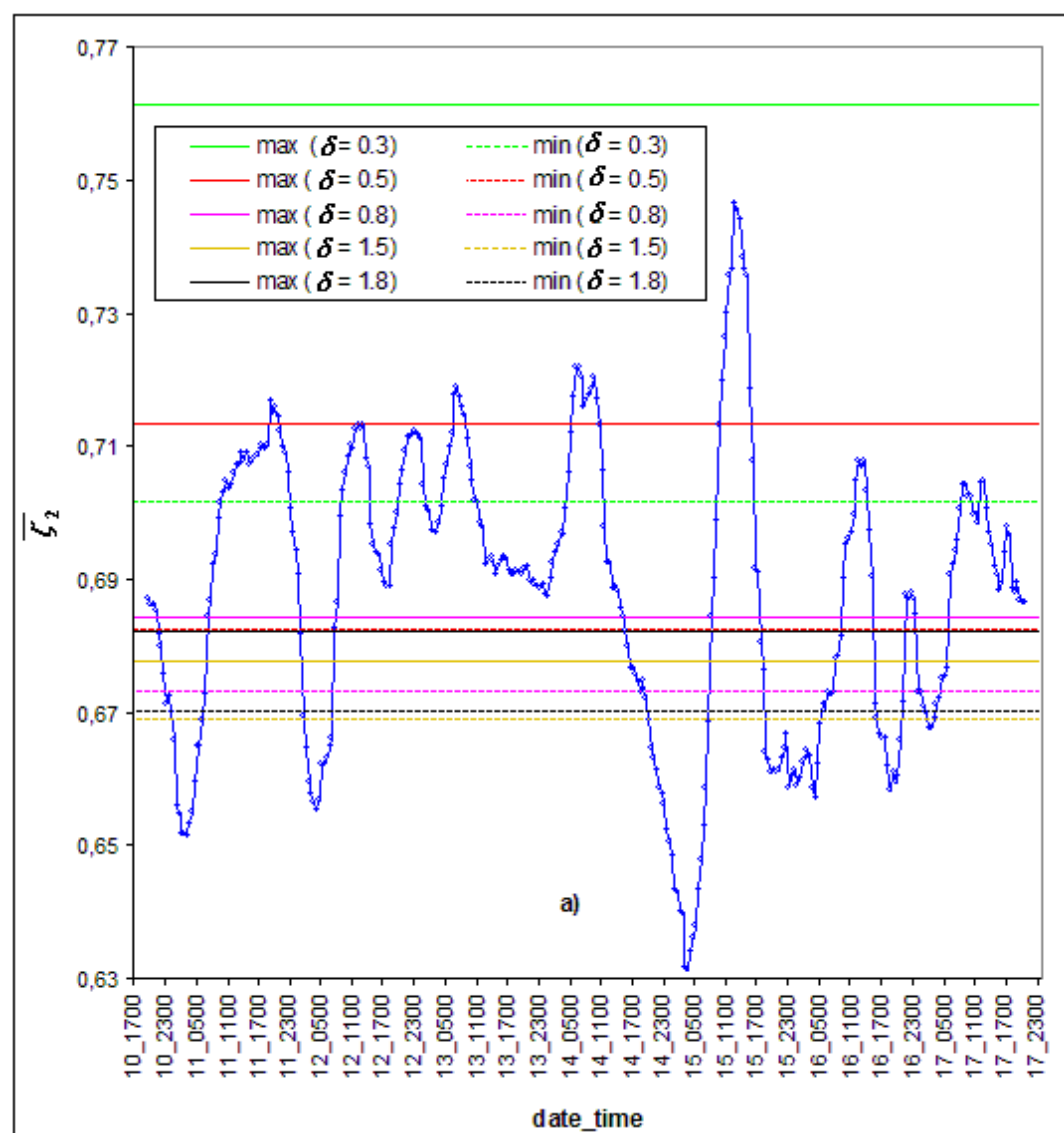


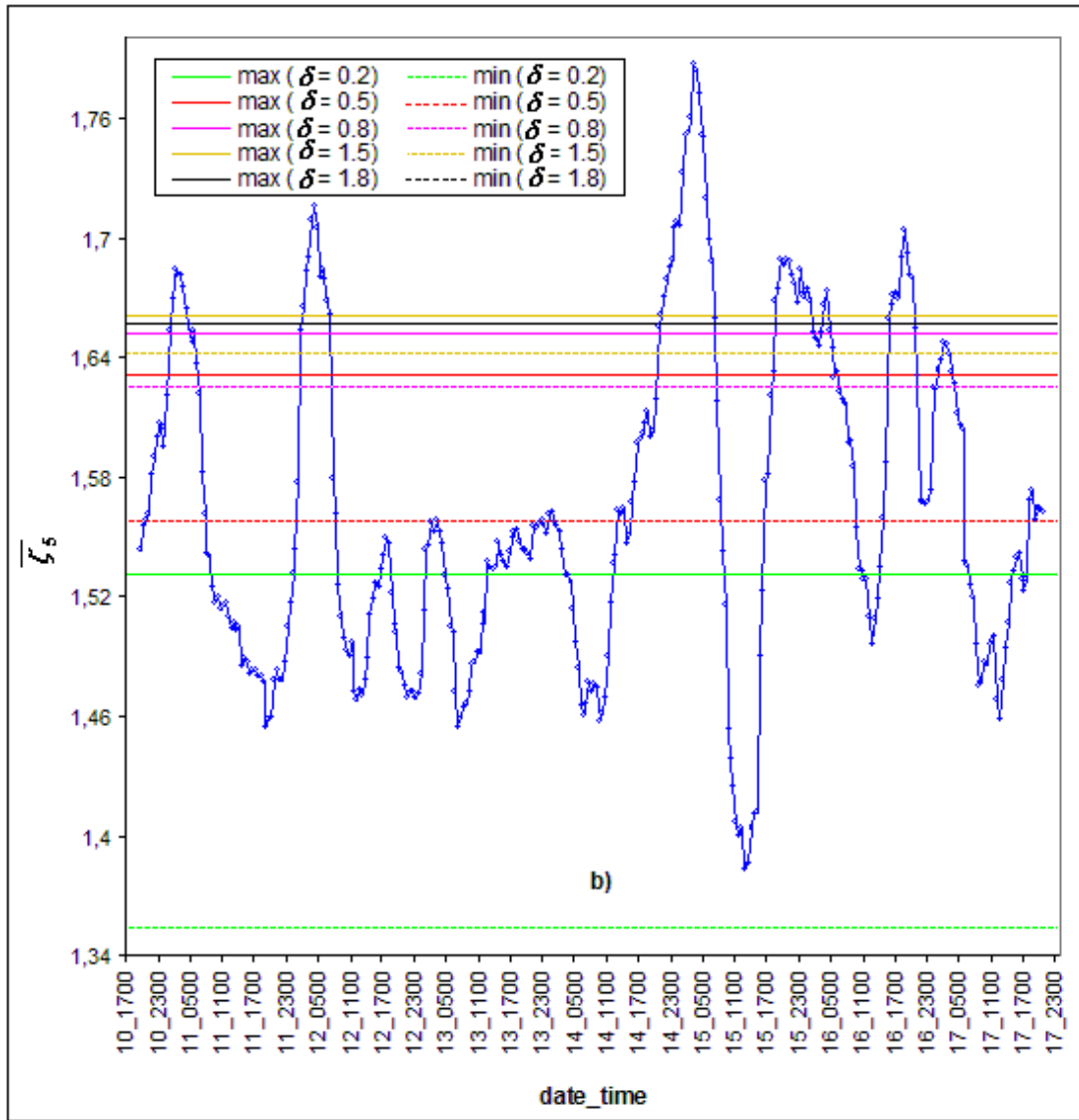
**Figura 3.19:** a) Evolución temporal de los exponentes de escala relativos de orden 1 (eje vertical de la izquierda) y de orden 4 (eje vertical de la derecha). Las líneas horizontales representan los valores máximos y mínimos de los exponentes de orden 1 (líneas discontinuas) y de orden 4 (líneas continuas) para ciertos valores del parámetro  $q$  del modelo; b) Igual que a), pero para los órdenes 2 y 5

Recordemos que en la Fig. 3.16 se observa que, por un lado, para órdenes menores que 3, las situaciones más cercanas a la turbulencia 2D (turbulencia que resulta análoga a la desarrollada en condiciones de fuerte estabilidad) presentan exponentes de escala menores que las situaciones más adentradas en el área de la turbulencia 3D (turbulencia similar a la correspondiente a situaciones más inestables); y por otro lado, se observa que, para órdenes mayores que 3, el comportamiento de los

exponentes de escala es la contraria. Pues bien, la Fig. 3.19 muestra el mismo tipo de comportamiento, pues las gráficas de órdenes menores que 3 correspondientes a las situaciones más estables presentan valores mínimos, en tanto que las gráficas de órdenes mayores que 3 resultan similares pero al revés. De acuerdo con la Fig. 3.19, existen ciertas situaciones atmosféricas, concretamente, las de mayor estabilidad de estratificación, para las que el modelo no es capaz de reproducir sus correspondientes exponentes de escala, pues los exponentes de escala resultan o demasiado altos (en el caso de órdenes mayores que 3), o demasiado bajos (en el caso de órdenes inferiores a 3).

La Fig. 3.20 es similar a la Fig. 3.19, pero en este caso los valores máximos y mínimos de los exponentes de escala relativos se han obtenido para ciertos valores del parámetro  $\delta$ . Se observa que cuando  $\delta$  aumenta, el modelo es capaz de reproducir el comportamiento de situaciones más estables. Sin embargo, al igual que antes, el modelo no puede representar la conducta de las situaciones con mayor estabilidad de estratificación.





**Figura 3.20:** a) Evolución temporal de los exponentes de escala relativos de orden 2. Las líneas horizontales representan los valores máximos (líneas continuas) y mínimos (líneas discontinuas) de los exponentes de orden 2 para ciertos valores del parámetro  $\delta$  del modelo; b) Igual que a), pero para el orden 5. Nota: la línea discontinua negra se solapa con la línea continua roja

Para obtener los valores característicos del modelo ( $q$  y  $\delta$ ) que proporcionen unos exponentes de escala representativos de una determinada situación atmosférica real, basta con sustituir el valor de esos exponentes de escala empíricos en las expresiones (3.79) y (3.80) o similares (pues esas expresiones se han obtenido para un determinado valor de  $q$  y de  $\delta$ ) y despejar el valor del parámetro correspondiente.



### 3.3.2.2. Modelo log-Poisson (con condición ESS)

Como hemos indicado en el apartado 3.3.1.4, She & L  v  que (1994) propusieron una estructura jerárquica para los momentos de la tasa de disipación de energía local,  $\varepsilon_n$

$$\varepsilon_n^{(p)} = \frac{\langle \varepsilon_n^{p+1} \rangle}{\langle \varepsilon_n^p \rangle} \quad (3.81)$$

La anterior jerarquía implica que las funciones de distribución de probabilidad correspondientes siguen una ley log-Poisson (Dubrulle 1994, She & Waymire 1995). Dubrulle (1994) modificó el modelo de She-L  v  que incluyendo la propiedad ESS. Su modelo se basa en las tres siguientes hipótesis:

La primera hipótesis es la similaridad:

$$\langle u_n^p \rangle \propto l_n^{p/3} \langle \varepsilon_n^{p/3} \rangle \quad (3.82)$$

La segunda es la ‘‘simetría escondida’’: los momentos de la disipación de energía siguen una estructura jerárquica, dada por:

$$\frac{\langle \varepsilon_n^{p+1} \rangle}{\varepsilon_n^{(\infty)} \langle \varepsilon_n^p \rangle} = A_p \left[ \frac{\langle \varepsilon_n^p \rangle}{\varepsilon_n^{(\infty)} \langle \varepsilon_n^{p-1} \rangle} \right]^\beta \quad (0 < \beta < 1) \quad (3.83)$$

donde  $A_p$  son unas constantes geométricas.

Y, finalmente, la tercera hipótesis indica:

$$\varepsilon_n^{(\infty)} \propto l_n^{-\Delta} \quad \text{cuando } l_n \longrightarrow 0 \quad (3.84)$$

## Intermitencia de la turbulencia

---

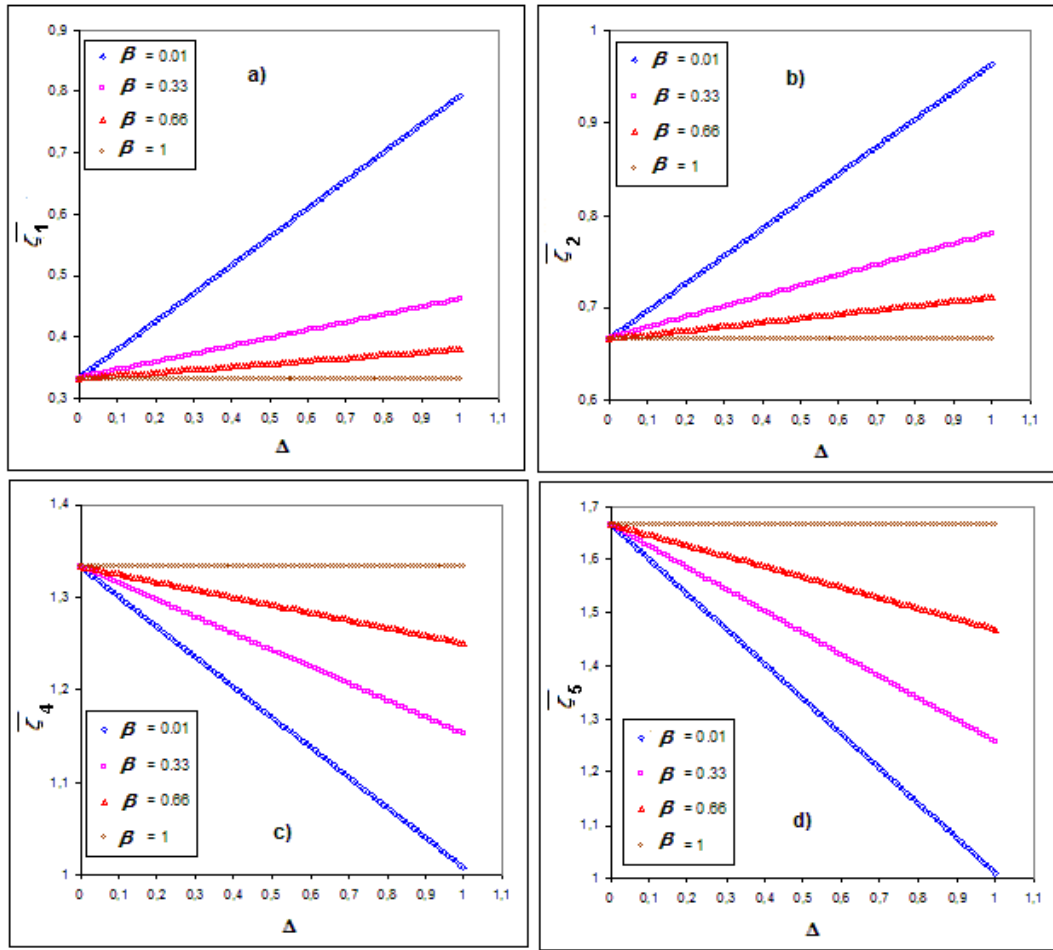
donde  $\Delta$  es un parámetro que depende de la codimensión (diferencia entre la dimensión euclidiana y la dimensión fractal) de la estructura disipativa, y que debe ser mayor o igual que 0.

Estas hipótesis implican que las funciones de estructura de la velocidad siguen la condición ESS, con un exponente de escala relativo dado por:

$$\overline{\zeta_p} = \frac{p}{3} + \Delta \left[ \frac{1 - \beta^{p/3}}{1 - \beta} - \frac{p}{3} \right] \quad (3.85)$$

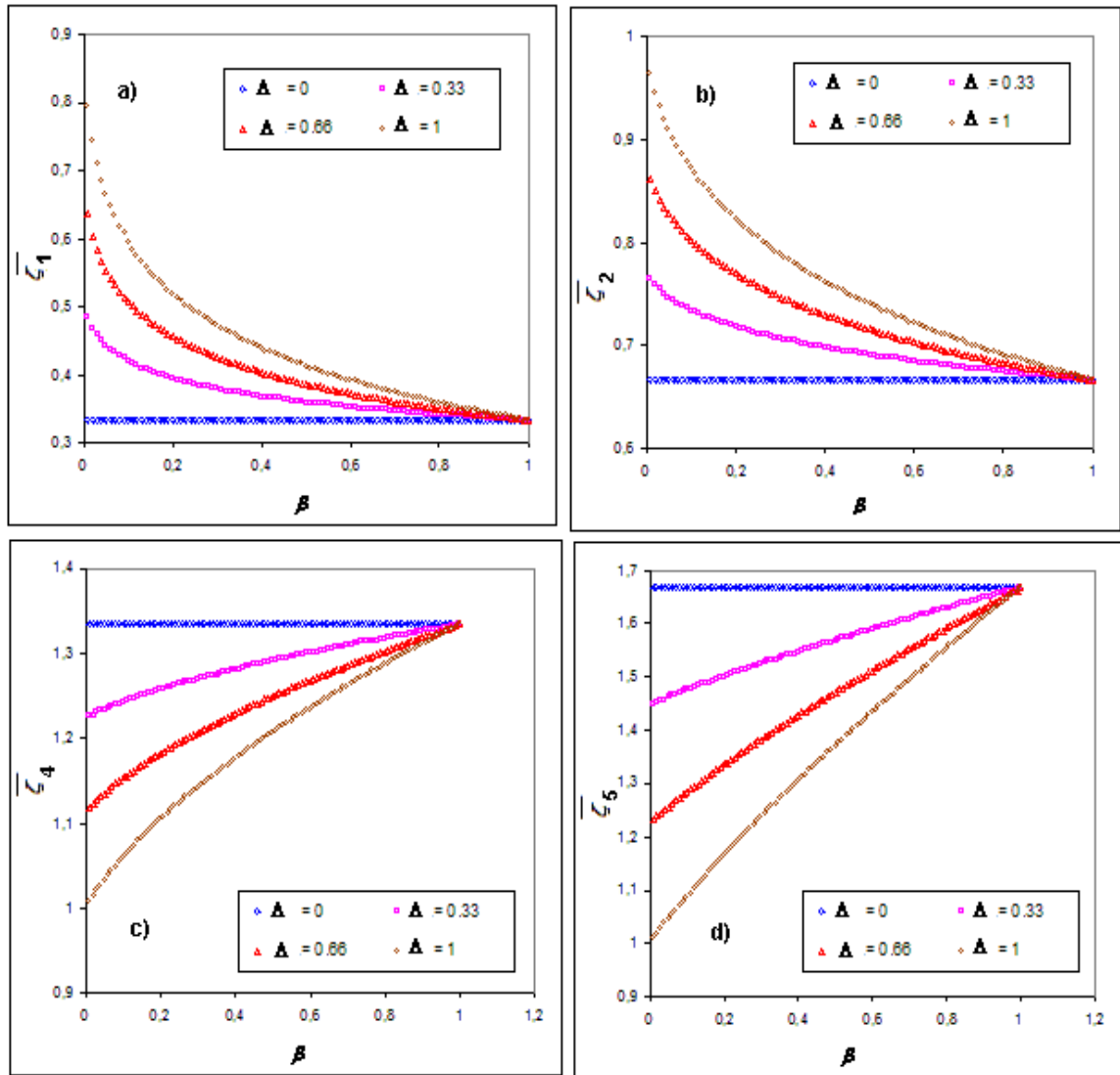
Por tanto, este modelo presenta dos parámetros característicos:  $\Delta$  (que, como hemos dicho, depende de la codimensión de la estructura disipativa) y  $\beta$ , que debe estar contenido en el intervalo (0,1]. Por tanto, haciendo uso de la expresión anterior, es posible establecer los exponentes de escala relativos cuando los parámetros anteriores se modifican.

En la Fig. 3.21 hemos representado los exponentes de escala relativos en función del parámetro  $\Delta$  (para diferentes valores del parámetro  $\beta$ ). Cuando  $\Delta$  aumenta, los exponentes correspondientes a órdenes menores de 3 también aumentan (el comportamiento de los exponentes de escala correspondientes a órdenes mayores de 3 es la opuesta). Esta conducta coincide con un incremento de la intermitencia de la turbulencia, porque una mayor curvatura cóncava en  $\overline{\zeta_p}$  vs.  $p$  (es decir, una mayor intermitencia) supone que, para órdenes inferiores a 3, los exponentes de escala serán mayores y que, para órdenes superiores a 3, serán menores (recordemos que el exponente de escala relativo de orden 3 es lógicamente igual a 1).



**Figura 3.21:** Evolución de los exponentes de escala relativos con el parámetro  $\Delta$  (para diferentes valores del parámetro  $\beta$ ) en el modelo log-Poisson

Para un cierto orden de la función de estructura y valor del parámetro  $\Delta$ , el parámetro  $\beta$  también presenta una clara relación con el exponente de escala, y por tanto con la intermitencia. En este caso, el comportamiento es el contrario al comportamiento de  $\Delta$ : un incremento de  $\beta$  implica una disminución de la intermitencia (como se aprecia en la Fig. 3.22).

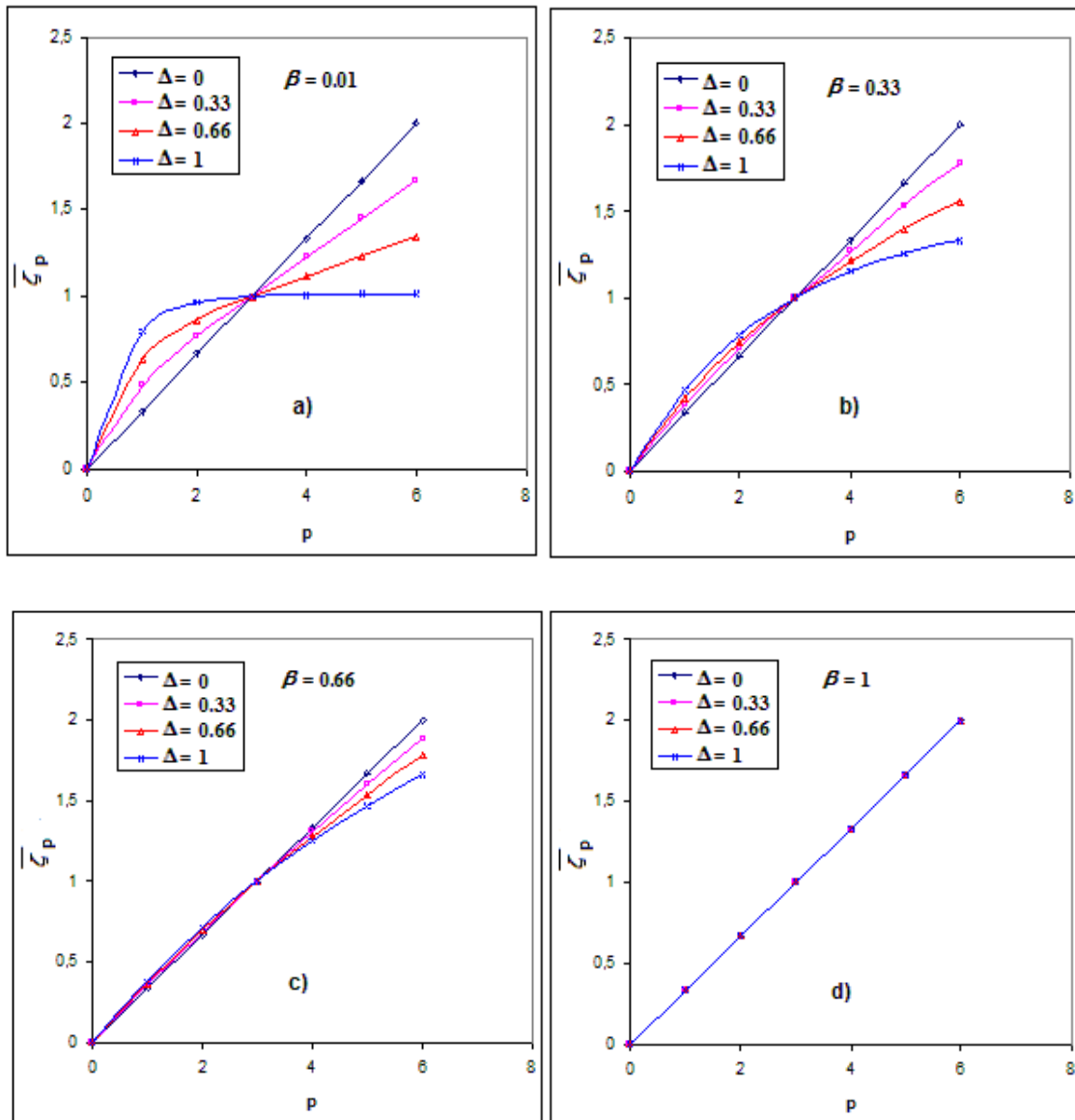


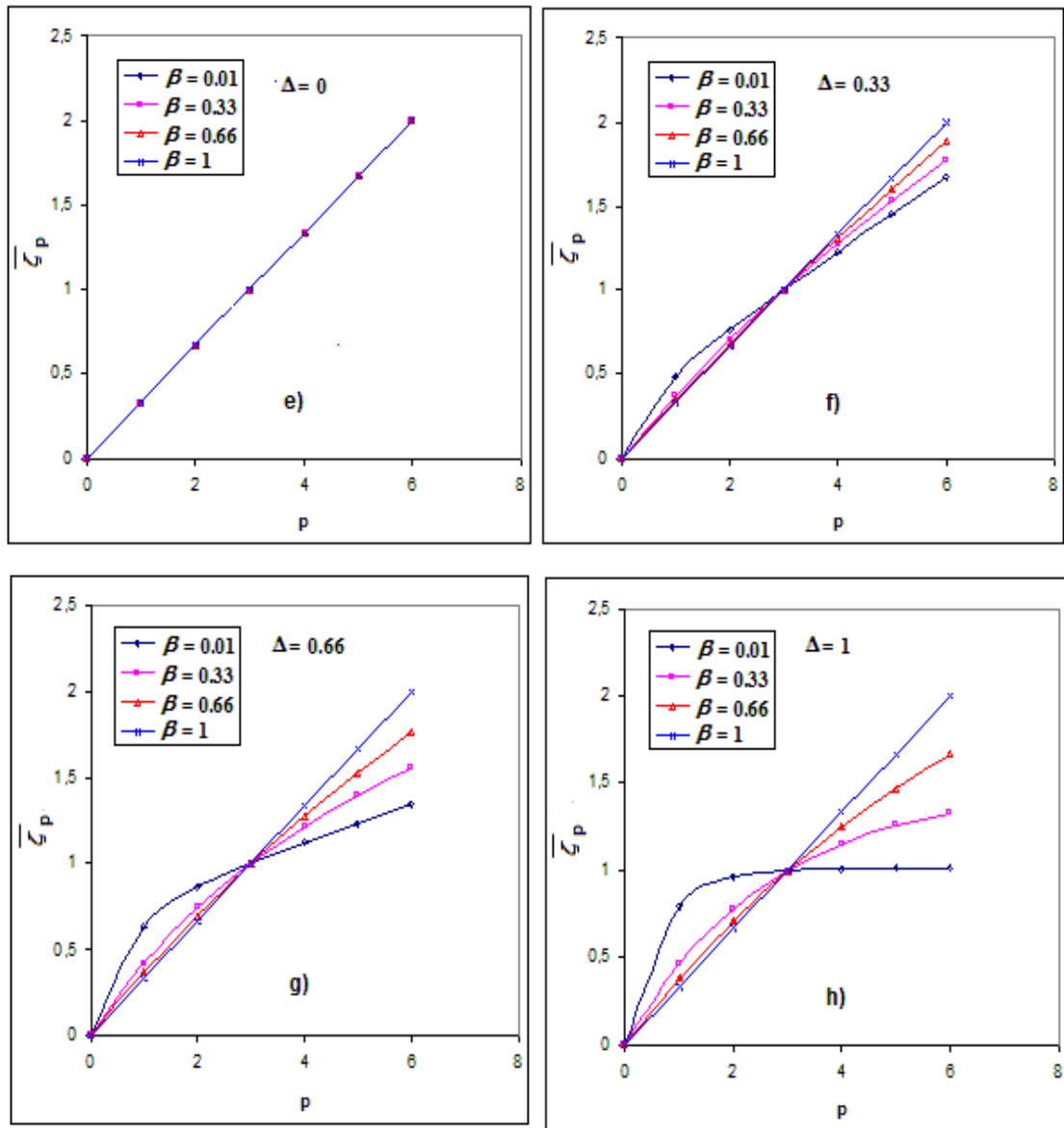
**Figura 3.22:** Evolución de los exponentes de escala relativos con el orden  $p$  (para un cierto  $\beta$  y para diferentes valores del parámetro  $\Delta$ ) en el modelo log-Poisson

Finalmente, en la Fig. 3.23 hemos representado la curva  $\bar{\zeta}_p$  vs.  $p$  para diferentes pares de valores  $\beta, \Delta$ . Se observa que cuando  $\beta$  aumenta, el valor de  $\Delta$  tiene menor importancia, y todas las gráficas (correspondientes a los distintos valores de  $\Delta$ ) se aproximan entre sí, acercándose cada vez más hacia la forma lineal que muestra la ausencia de intermitencia. La misma consideración puede hacerse respecto a  $\Delta$ , pero en sentido contrario: conforme disminuye su valor, la situación se hace menos intermitente, independientemente del valor de  $\beta$ ; este último resultado se debe a la dependencia, ya mencionada, que tiene  $\Delta$  con respecto a la codimensión. En efecto,

## Intermitencia de la turbulencia

el aumento en la dimensión fractal supone una disminución en la codimensión (en  $\Delta$ ) y, por otra parte, dimensión fractal e intermitencia evolucionan en sentidos contrarios, es decir, situaciones con una menor dimensión fractal (con una menor ocupación del espacio) se caracterizan por una mayor intermitencia. Por tanto, una mayor codimensión (una mayor  $\Delta$ ) supone un aumento en la intermitencia.





**Figura 3.23:** Evolución de los exponentes de escala relativos con el orden  $p$ ; a), b), c) y d): para un cierto  $\beta$  y para diferentes valores del parámetro  $\Delta$ . e), f), g) y h): para un cierto  $\Delta$  y para diferentes valores de  $\beta$

Por tanto, pares de valores  $\beta, \Delta$  permiten modelizar las diferentes situaciones empíricas (como las correspondientes a SABLES98) caracterizadas por las curvas  $\overline{\zeta}_p$  vs.  $p$ .

## Intermitencia de la turbulencia

Vistos los modelos anteriores, en la Tabla 3.1 reflejamos, a modo de resumen, los exponentes de escala de las funciones de estructura de la velocidad correspondientes a algunos de esos modelos.

Modelo	Exponente de escala de la función de estructura de la velocidad
K41	$\zeta_p = \frac{p}{3}$
K62 o log-normal	$\zeta_p = \frac{p}{3} + \frac{\mu p}{18}(3-p)$
$\beta$	$\zeta_p = \frac{p}{3} + \frac{\ln \beta}{\ln r} \left(1 - \frac{p}{3}\right)$
She-Lévêque	$\zeta_p = \frac{p}{3}(1-\alpha) + \alpha \frac{1-\beta^{p/3}}{1-\beta}$
p o binomial	$\zeta_m = 1 - \log_2(p^{m/3} + (1-p)^{m/3})$
difusión	$\zeta_p = (\gamma - 2\beta)p - \beta p(p-3)$
log-Poisson (con ESS)	$\overline{\zeta_p} = \frac{p}{3} + \Delta \left[ \frac{1-\beta^{p/3}}{1-\beta} - \frac{p}{3} \right]$

**Tabla 3.1:** Exponentes de escala de la función de estructura de la velocidad para distintos modelos de intermitencia

## **4. Estudio de la cascada energética y la intermitencia de la turbulencia en la capa límite atmosférica<sup>5</sup>**

---

<sup>5</sup> Parte de los resultados presentados en este capítulo han sido publicados en los siguientes artículos:

- Vindel JM, Yagüe C & Redondo JM (2008a) Relationship between intermittency and stratification, *Nuovo Cimento C. Geophysics and Space Physics* 31: 669-678.
- Vindel JM, Yagüe C & Redondo JM (2008b) Structure function analysis and intermittency in the atmospheric boundary layer. *Nonlinear Process Geophys* 15: 915-929.
- Vindel JM & Yagüe C (2011) Intermittency of turbulence in the atmospheric boundary layer: scaling exponents and stratification influence. *Bound-Layer Meteorol* 140: 73-85.



#### **4.1. Emplazamiento de la campaña SABLES98**

Los datos atmosféricos que utilizaremos para nuestros cálculos serán los proporcionados por la campaña SABLES98 (*Stable Atmospheric Boundary Layer Experiment in Spain* 1998). Un informe detallado sobre esa campaña puede verse en Cuxart *et al.* (2000).

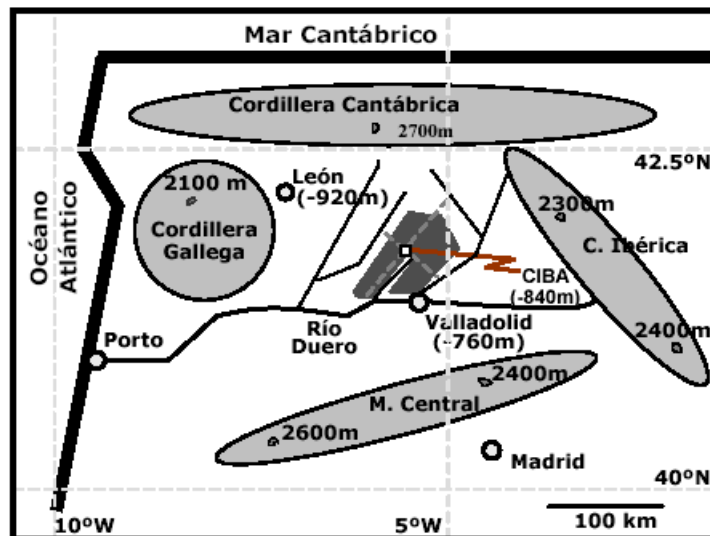
Esta campaña se desarrolló entre los días 10 y 28 de septiembre de 1998 en las instalaciones de que dispone el CIBA (Centro de Investigación de la Baja Atmósfera cuya titularidad es compartida por la Universidad de Valladolid y la actual Agencia Estatal de Meteorología – AEMET-) en las proximidades a Valladolid (coordenadas 41° 49' N, 4° 56' W, 840m snm).

En la Fig. 4.1 puede verse una vista aérea del lugar:



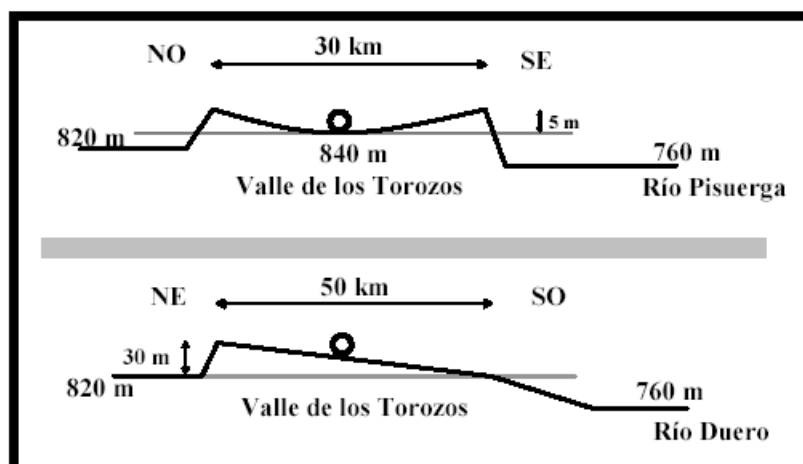
**Figura 4.1.** Vista aérea del CIBA desde la torre de 100 m

En la Fig. 4.2 se muestra un croquis del lugar, donde puede apreciarse las distancias de los sistemas montañosos al emplazamiento.



**Figura 4.2:** Croquis del emplazamiento de toma de datos en la campaña SABLES98 (Cuxart *et al.* 2000).

El emplazamiento del operativo tiene lugar sobre una amplia meseta situada a una altitud de 840 m por encima del nivel del mar (Los Torozos) y a unos 50 m por encima de una amplia zona llana, como se puede apreciar en las secciones verticales del lugar, que se muestran en la figura 4.3.

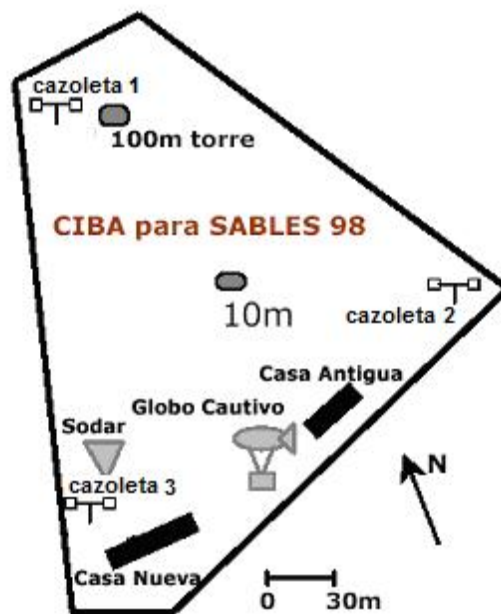


**Figura 4.3:** Secciones verticales del emplazamiento de toma de datos en la campaña SABLES98 (Cuxart *et al.* 2000).

Además, hemos de indicar que el emplazamiento se encuentra rodeado por bastantes claros de hierba con una rugosidad superficial de  $10^{-4}$  m (San José *et al.* 1985)

#### 4.2. Instrumentación

En la Fig. 4.4 se muestra un esquema con la disposición del instrumental utilizado en la campaña:



**Figura 4.4:** Esquema de disposición del instrumental para la toma de datos en la campaña SABLES98 (Cuxart *et al.* 2000).

Como se aprecia en el esquema se dispone de dos torres, una de 100 m y otra de 10 m. La primera está equipada con la instrumentación que se indica en la Tabla 4.1 (Cuxart *et al.* 2000).

## Estudio de la cascada energética y la intermitencia de la turbulencia en la capa límite atmosférica

Instrumento	z (metros)	Frec. de muestreo (Hz)	Umbral	Precisión
Anemómetro sónico Solent	5.8, 13.5, 32	20	15mm s <sup>-1</sup> para u,v; 4mm s <sup>-1</sup> para w	±3%
Veletas de viento	10, 20, 100	5	1.0 m s <sup>-1</sup>	±3%
Anemómetro de cazoleta	3, 10, 20, 50, 100	5	0.5 m s <sup>-1</sup>	±0.2m s <sup>-1</sup>
Termistor	10	1		±0.1°C
Termómetros de resistencia de Platino	10-20, 20-50	1		±0.1°C
Termopares	0.22, 0.88, 2, 3.55, 5.55, 8, 10.88, 14.22, 18, 22.22, 26.88, 32, 37.55, 43.55, 50	5		±0.03°C
Barómetro	Superficie	1		±0.1 hPa
Sensor de infrarrojos (T <sub>superficie</sub> )	2	1		±0.1°C
Radiómetro	2	1		±5-10%
Higrómetro del punto de rocío	3, 20	1		±2-3%
Sensor de humedad Ophir	13.5	20		±2%

**Tabla 4.1:** Instrumentación de la torre de 100m

### 4.3. Datos empleados

En primer lugar, debemos decir que han sido numerosos los trabajos desarrollados y publicados a partir de los datos obtenidos en esta campaña y otras posteriores en el CIBA (Terradellas *et al.* 2001, Cuxart *et al.* 2002, Terradellas *et al.* 2005, Yagüe *et al.* 2006, Conangla *et al.* 2008, Viana *et al.* 2009, Viana *et al.* 2010, Viana *et al.* 2012....)

Para el estudio de la intermitencia que hemos realizado en esta Tesis Doctoral, hemos empleado los datos de velocidad medidos por el anemómetro sónico a 32 metros, correspondientes al periodo que va desde las 17:00 GMT del día 10 de septiembre a las 23:30 GMT del día 17 de septiembre, tomados a intervalos de 30 minutos (es decir, 350 casos de estudio). Para cada una de esas muestras se han utilizado los 6000 datos medidos por el anemómetro (20 Hz) en 5 minutos, que resulta un número suficiente de datos como para realizar los estudios estadísticos que se pretenden y, por otro lado, evitar en la medida de lo posible, la influencia de movimientos a mesoescala, pues estamos interesados principalmente en las escalas turbulentas. Cuando la estabilidad es muy alta, incluso considerando 5 minutos como ventana de promedio, por debajo de esta escala temporal puede haber un solapamiento entre la turbulencia y movimientos sub-mesoescalares (Viana 2011).

## Estudio de la cascada energética y la intermitencia de la turbulencia en la capa límite atmosférica

---

El conjunto de todas estas muestras cubre un amplio abanico de situaciones de estabilidad de estratificación, que van desde situaciones con fuerte convección diurna, a noches con una extrema estabilidad. Además, las condiciones sinópticas cambiaron a lo largo del periodo de estudio; del 10 al 14 de septiembre prevalecieron condiciones con un fuerte viento y el cielo estuvo nublado, aunque no hubo precipitación. Esta situación estaba relacionada con un sistema de baja presión localizado en el Atlántico Norte, que produjo vientos del SW. Para el resto del periodo de estudio, el anticiclón de las Azores se extendió sobre España, prevaleciendo vientos sinópticos ligeros y cielos despejados, lo que favoreció el desarrollo de altas estabilidades nocturnas.

Por otro lado, con objeto de estimar el tipo de estratificación existente en la atmósfera en cada una de las situaciones de estudio consideradas, también hemos empleado datos de temperatura tomados a 50m y a 0.22m, pues la diferencia entre esos valores es un buen indicador del tipo de estratificación reinante en la baja atmósfera cerca de la superficie. En efecto, como ya hemos explicado en el punto 2.6, cuanto más positiva sea la diferencia entre esas temperaturas, mayor será el grado de estabilidad existente, en tanto que si la diferencia es negativa, nos encontramos ante una situación de inestabilidad de estratificación, pues la temperatura en las capas bajas resulta mayor que en capas de mayor altura.

En los análisis llevados a cabo en esta tesis hemos trabajado con escalas temporales, ya que las espaciales no estaban disponibles. Por ello, cuando ha sido necesaria la utilización de la escala espacial, hemos hecho uso de la hipótesis de la turbulencia congelada de Taylor (Stull 1988); en ese sentido, para calcular la escala espacial, la velocidad media del flujo se ha multiplicado por la correspondiente escala temporal. Por tanto, escalas espaciales mayores (menores), se corresponden con escalas temporales de mayor (menor) amplitud para una misma velocidad.

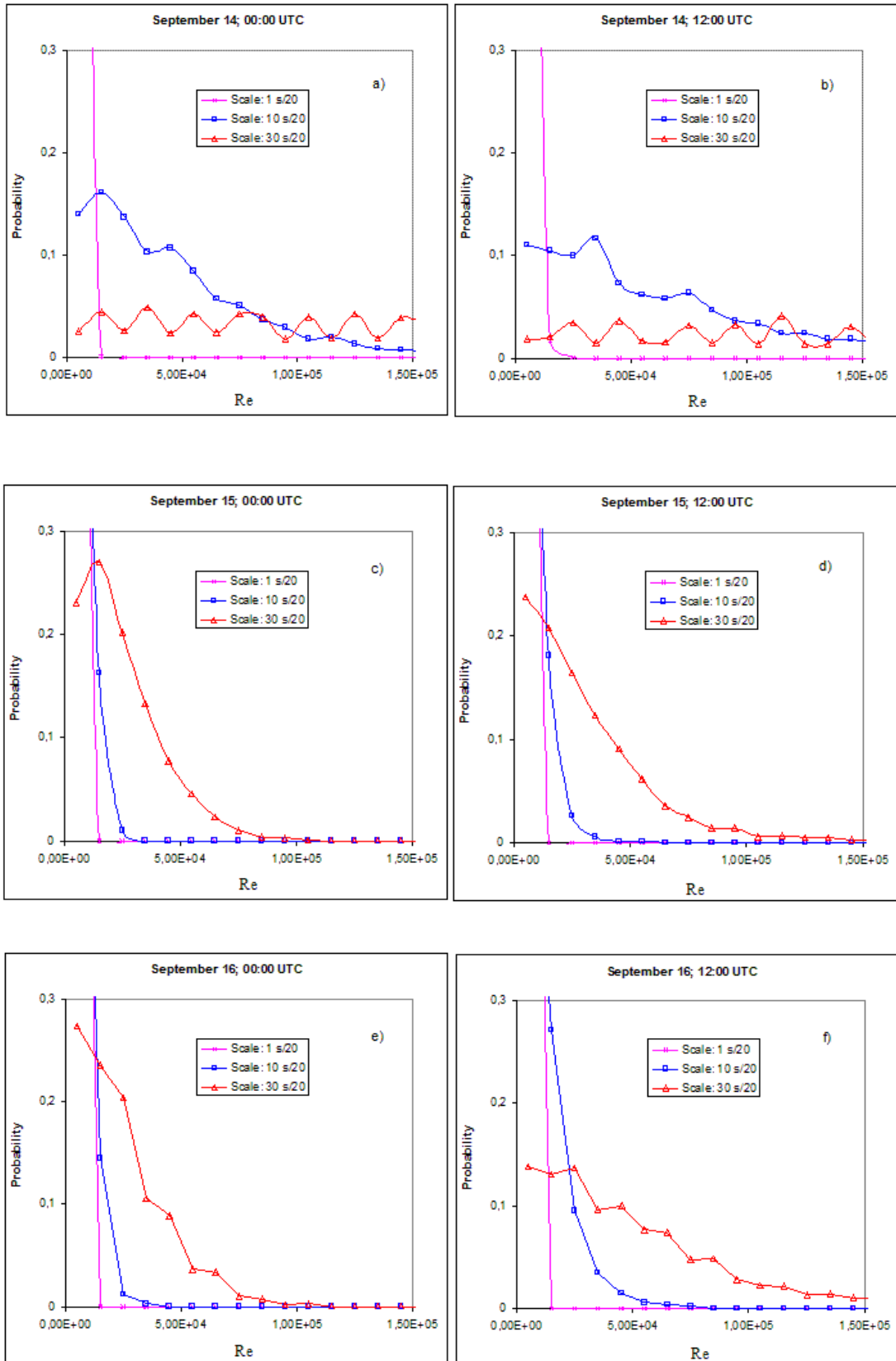
El objetivo del estudio realizado en este capítulo es mostrar la evolución a lo largo de la cascada de algunas de las variables introducidas en el capítulo 2. Concretamente, en los apartados 4.4 y 4.5 analizaremos la evolución del Número de Reynolds y del tiempo de vida de los remolinos, en tanto que la evolución de la variable velocidad la

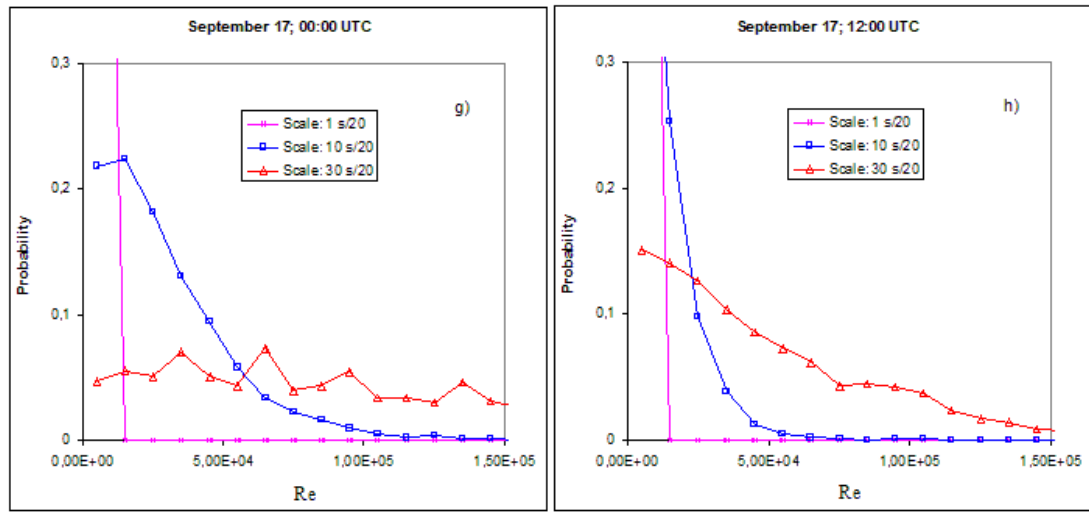
veremos en el apartado 4.6 dedicado a la estimación de la intermitencia de la turbulencia en la CLA. Posteriormente, con objeto de profundizar en las características de ese fenómeno, analizaremos la influencia que sobre el mismo pueden tener la estratificación térmica y el viento (apartado 4.7). También trataremos la geometría fractal presente en la cascada a través del cálculo de los correspondientes exponentes de Hurst generalizados (en el propio apartado 4.7 y en el 4.8, para mostrar la intermitencia a través de la dimensión fractal, así como las pendientes espectrales asociadas a las distintas situaciones de estudio). Además, mostraremos la posibilidad de modelizar las distribuciones de probabilidad representativas de la velocidad a lo largo de la cascada mediante distribuciones de Lévy (4.9). Finalmente, en el apartado 4.10 aplicaremos algunos de los modelos de intermitencia explicados a nuestros datos, con objeto de calcular el (los) parámetro(s) de intermitencia correspondiente(s).

### **4.4. Evolución del Número de Reynolds con la escala**

Comenzamos en primer lugar analizando la evolución del Número de Reynolds a lo largo de la cascada y, con ese objeto, hemos representado en la Fig. 4.5 esa evolución (en términos de probabilidad) para distintos momentos del periodo de estudio (momentos que resultan especialmente significativos en cuanto a la estratificación que presentan, por corresponder con situaciones diurnas - inestabilidad - y nocturnas - estabilidad).

## Estudio de la cascada energética y la intermitencia de la turbulencia en la capa límite atmosférica





**Figura 4.5:** Probabilidades de los números de Reynolds de los remolinos correspondientes a varias escalas (1, 10 y 30 s/20)

La metodología utilizada para el cálculo de esos valores ha sido la siguiente: como ya indicamos en el apartado 2.3, para una cierta escala espacial  $l_n$  (recordemos que, mediante la hipótesis de Taylor, podemos utilizar escalas temporales  $t_n$ ) disponemos de una colección de variables aleatorias correspondientes a esa escala o paso de la cascada. Entre esas variables se encuentra el número de Reynolds ( $Re_n$ ), que se puede calcular a partir de la variable aleatoria velocidad a esa escala ( $u_n$ ) mediante la expresión (2.6). Por tanto, lo que muestra la Fig. 4.5 son los valores de la variable  $Re_n$  acompañados de sus respectivas probabilidades, es decir, la distribución de probabilidad del número de Reynolds a distintas escalas. Los resultados de la Fig. 4.5 (para comparar mejor el comportamiento de las diferentes escalas, se ha elegido la misma anchura de intervalos de clase para todos ellos, aunque esta representación puede disminuir la resolución de cada escala en particular) muestran como, cuando consideramos escalas menores, los números de Reynolds más probables se hacen menores; así que, cuando la escala disminuye, la tasa de disipación de energía adquiere mayor importancia frente a la tasa de energía transferida, lo cual está de acuerdo con la teoría de la cascada; por el contrario, para escalas mayores, la turbulencia es mayor (números de Reynolds más grandes). Los resultados también muestran los diferentes comportamientos del número de Reynolds en base al viento reinante en la situación representada. En efecto, la representación correspondiente a las escalas de 10 y 30 (s/20) muestra que, en los momentos más ventosos

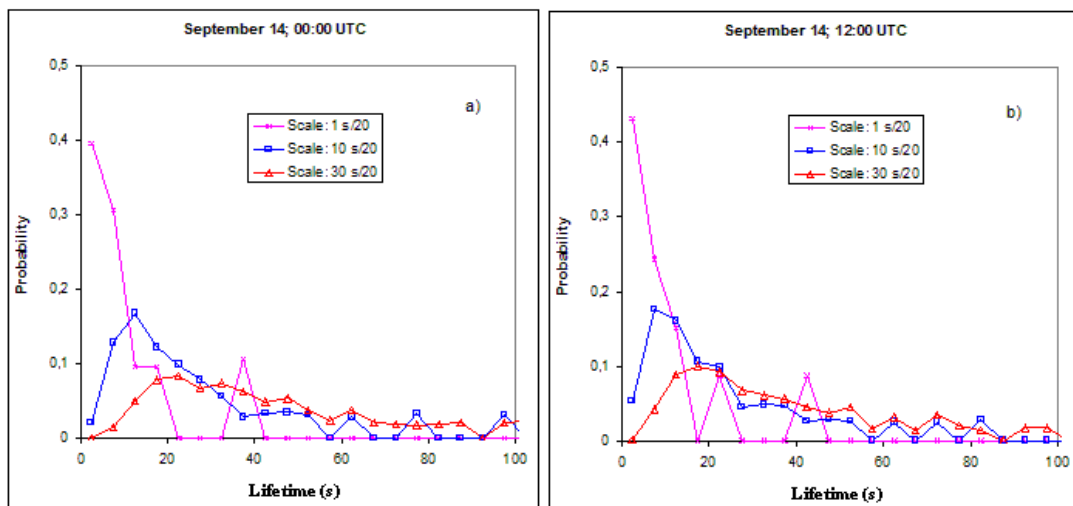


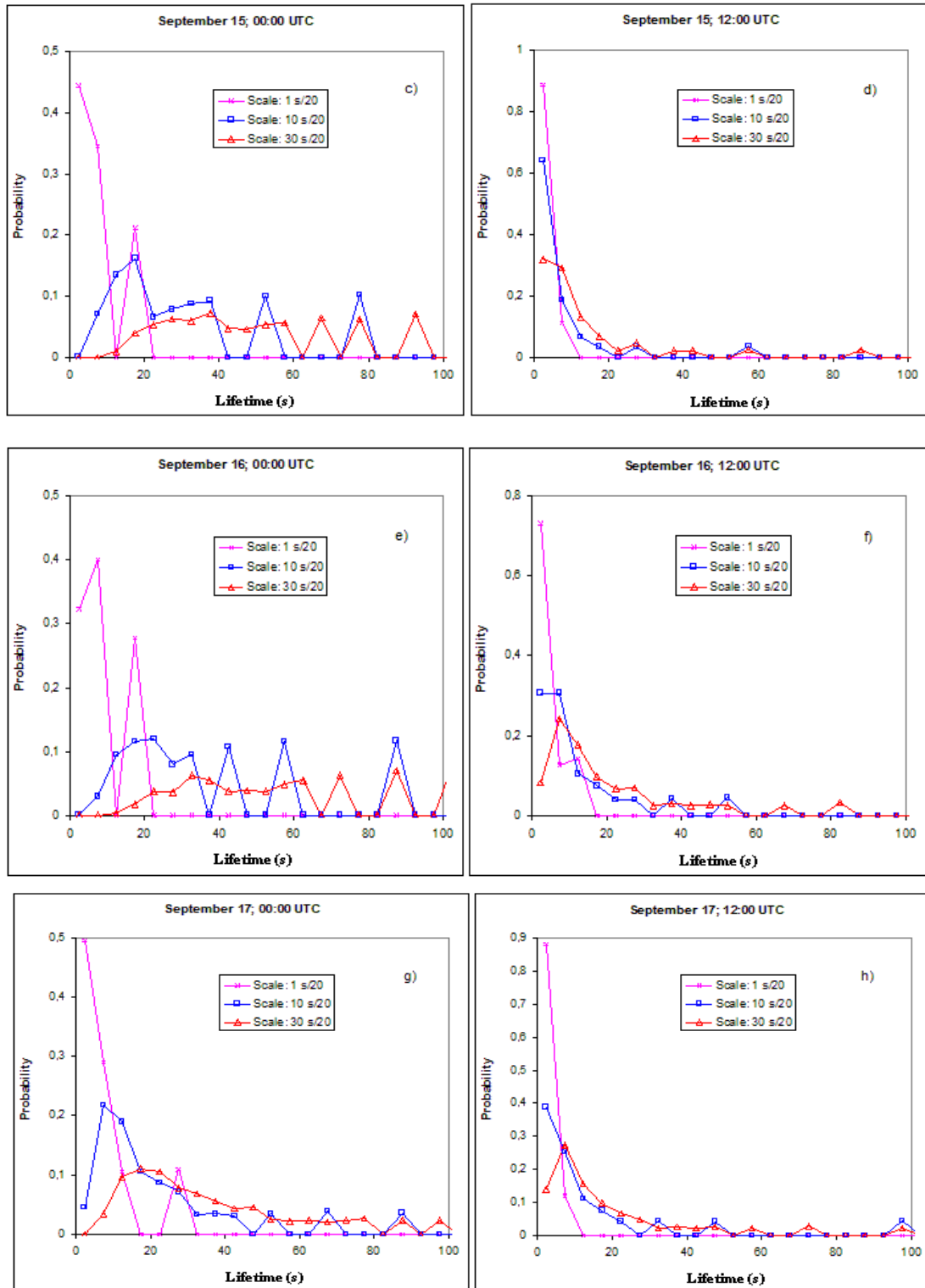
## Estudio de la cascada energética y la intermitencia de la turbulencia en la capa límite atmosférica

representados (como es la noche del día 14 y, en menor medida, la del día 17 de septiembre), números de Reynolds altos presentan cierta probabilidad, en tanto que para los momentos menos ventosos (como las noches de los días 15 y 16) las probabilidades correspondientes a los mayores números de Reynolds se anulan totalmente. Esto confirma el resultado esperado de una mayor turbulencia mecánica en situaciones más ventosas.

### 4.5. Tiempo de vida de los remolinos

Analizados los números de Reynolds de diferentes situaciones, a continuación pasamos a estudiar los tiempos de vida de los remolinos presentes a lo largo de la cascada, para esas mismas situaciones analizadas en el punto anterior. En la Fig. 4.6 hemos representado la evolución con la escala (en términos de probabilidad) del tiempo de vida de los remolinos (el tiempo necesario para llevar a cabo una rotación). La metodología utilizada para el cálculo es similar a la explicada para los números de Reynolds.





**Figura 4.6:** Probabilidades de los tiempos de vida de los remolinos correspondientes a varias escalas (1, 10 y 30 s/20) y diferentes situaciones de estudio

Los resultados están nuevamente en consonancia con la teoría de la cascada; cuando la escala disminuye, los menores tiempos de vida resultan ser más probables (los remolinos menores viven menos).

También resulta de interés señalar las diferencias entre las situaciones diurnas y las nocturnas; de hecho, en general para una misma escala, durante el día son más probables los tiempos de vida menores que durante la noche; por tanto, en las situaciones más inestables, los remolinos se destruyen más rápidamente.

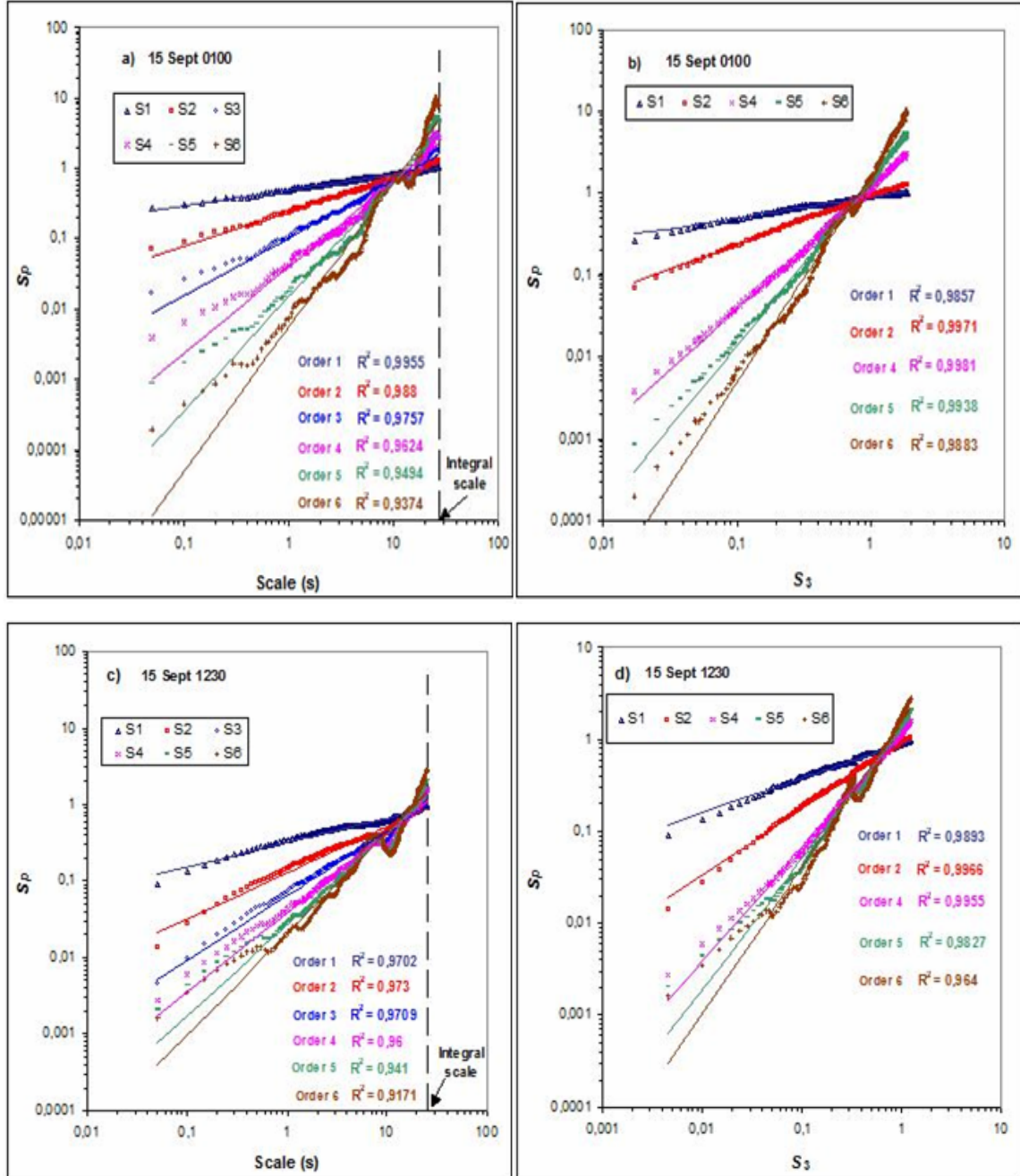
### **4.6. Intermitencia de las situaciones estudiadas**

A continuación analizaremos la evolución de la variable velocidad a lo largo de la cascada, es decir, el grado de intermitencia existente. Para ello, se hará uso de los métodos ya mencionados en la sección 3.2 para el estudio de este fenómeno en las distintas situaciones meteorológicas presentes a lo largo del periodo de estudio de la campaña SABLES98.

#### **4.6.1. Funciones de estructura**

Para poder utilizar este método es necesaria la existencia de escalamiento, es decir, la existencia de una ley potencial entre las funciones de estructura y la escala. Por ello, lo primero será verificar el cumplimiento de dicha ley. En ese sentido, en la Fig. 4.7a y 4.7c se muestra, para algunas situaciones de la Campaña SABLES98, la relación lineal existente entre el logaritmo de la escala y el de la función de estructura. Hemos representado dos situaciones de estudio muy diferentes: 15 de septiembre a las 01:00 GMT (noche muy estable), y 15 de septiembre a las 12:30 GMT (convección diurna). Se observa claramente que la desviación respecto de la forma lineal se incrementa cuando el orden de las funciones de estructura aumenta (para órdenes mayores que 3, el ajuste lineal ya no es excesivamente bueno). De hecho, atendiendo al número de puntos utilizados para cada situación (recordemos que 6000), para asegurar la necesaria convergencia estadística el orden no debería ser superior a 3 (Apéndice VI o Vindel *et al.* 2008b). El orden máximo ( $p_{\max}$ ) para esa convergencia se puede estimar a partir de la siguiente expresión:

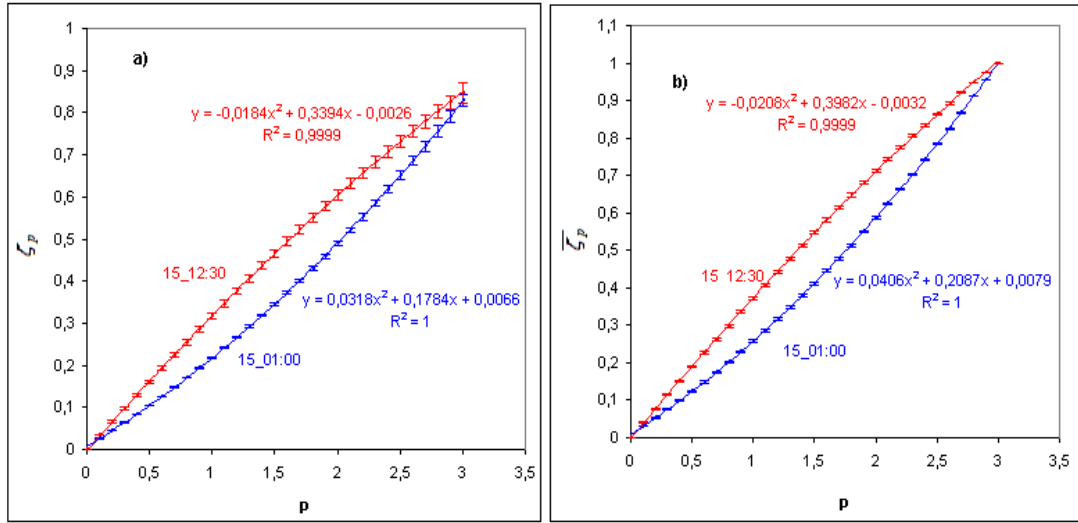
$$p_{\max} \approx \log(n_{\text{ptos}}) - 1 \quad (4.1)$$



**Figura 4.7:** a) y c) : Funciones de estructura vs. escala; b) y d): funciones de estructura vs.  $S_3$ . a) y b): 15 de septiembre a las 01:00 GMT; c) y d): 15 de septiembre a las 12:30 GMT. Se incluye el coeficiente de determinación del ajuste lineal

También se muestran las funciones de estructura de los distintos órdenes frente a la función de estructura de orden 3 para comprobar el cumplimiento de la condición ESS. En todos los casos la bondad del ajuste es elevada, de acuerdo con los coeficientes de correlación obtenidos (mayor en la situación más estable, a pesar de que la homogeneidad debe ser mayor en la situación más inestable), y aún más en el caso de la condición ESS. Ese alto grado de bondad en el ajuste se repite en todas las situaciones analizadas (aunque se trate de situaciones no homogéneas, como de hecho, son la mayoría).

Una vez verificado que, en efecto, existe el escalamiento, estamos en condiciones de determinar los exponentes de escala correspondientes a las funciones de estructura, y dado que ese escalamiento se aprecia claramente para todas las situaciones (homogéneas y no homogéneas), podremos considerar suficientemente representativos para el análisis tanto a los exponentes absolutos como a los relativos (aunque estos últimos, aún con mayor motivo) La forma que adopte la curva de esos exponentes frente al orden de las funciones de estructura correspondientes servirá como estimador del grado de intermitencia existente. En efecto, el mayor grado de alejamiento de esa curva con respecto a una forma lineal será indicativo de una mayor intermitencia. Los exponentes de escala se han estimado a partir de las funciones de estructura, utilizando como rango de escalamiento, para cada caso de estudio, todas las escalas disponibles (desde la escala menor, 1 (s/20), hasta la escala integral). Si representamos los exponentes de escala,  $\zeta_p$ , frente al orden de la función de estructura,  $p$ , obtenemos resultados como los mostrados en la Fig. 4.8 (correspondientes a las mismas situaciones representadas en la Fig. 4.7).



**Figura 4.8:** Exponentes de escala vs. orden de las funciones de estructura para dos situaciones meteorológicas (diurna y nocturna), con barras de errores (15 de septiembre de 1998 a las 01:00 GMT y a las 12:30 GMT). a) Exponentes de escala absolutos; b) exponentes de escala relativos

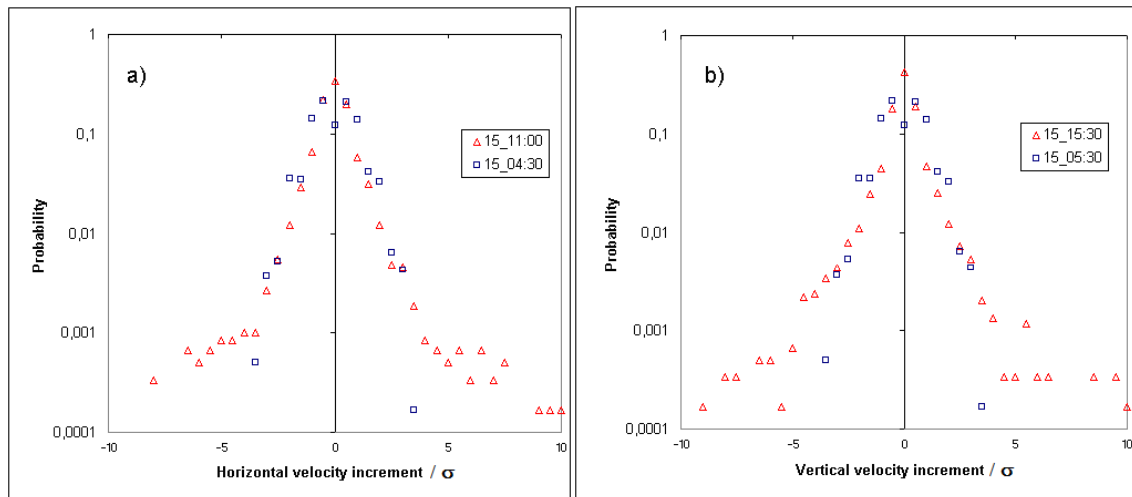
La curva correspondiente al 15 de septiembre a las 12:30 GMT presenta la usual curvatura cóncava de este tipo de funciones, y que es debida a la intermitencia de la turbulencia. Sin embargo, la curva correspondiente a las 01:00 GMT presenta una forma convexa (el criterio para definir concavidad o convexidad es el seguido por Borwein & Lewis 2000). Esta inusual conducta será tratada con más detalle posteriormente.

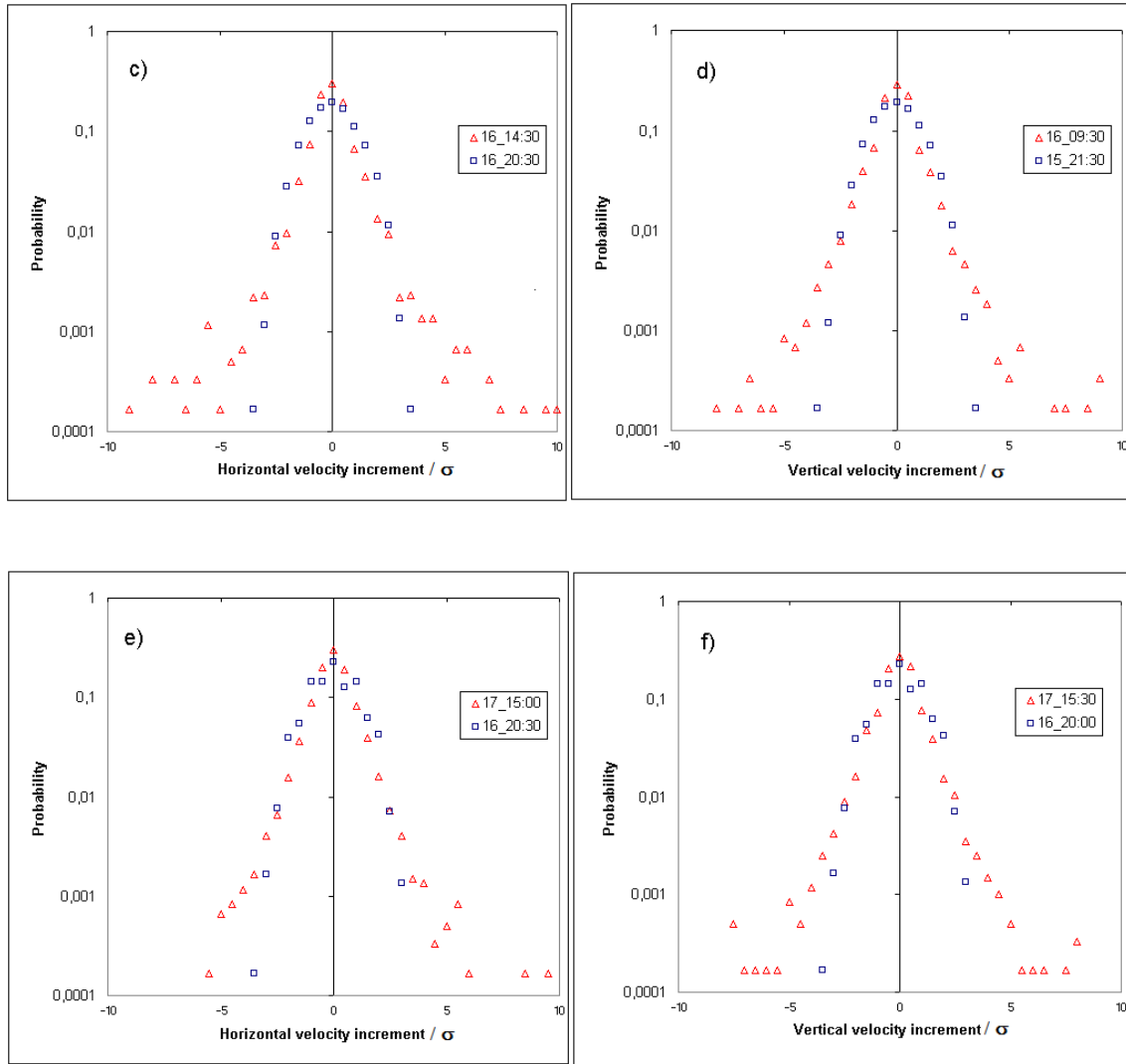
En las figuras anteriores se observa que las curvas pueden ajustarse con gran precisión a funciones cuadráticas. De hecho, en la mayoría de procesos, la relación no lineal de  $\zeta_p$  vs.  $p$  puede ser parametrizada como una polinomial, y la forma más simple es una aproximación cuadrática (Ganti *et al.* 2009). Por tanto, como ya veremos, es posible utilizar el coeficiente del término cuadrático,  $\beta$ , para cuantificar el grado de curvatura de las curvas  $\zeta_p$  vs.  $p$  y  $\bar{\zeta}_p$  vs.  $p$ . (desviación respecto de una forma lineal) y, en consecuencia, utilizar esos coeficientes como parámetros indicativos del grado de intermitencia que presenta la turbulencia.

#### 4.6.2. Funciones de densidad de probabilidad

Como ya hemos indicado anteriormente, mediante el análisis visual de la evolución con la escala de las funciones de densidad, en ocasiones es posible realizar una estimación del grado de intermitencia existente.

Con objeto de visualizar la diferencia entre las funciones de densidad correspondientes a situaciones con distinto grado de intermitencia hemos representado en la Fig. 4.9 las funciones de densidad de probabilidad (PDFs) correspondientes a la escala 1 (la menor escala que podemos representar) construida a partir de los incrementos de velocidad horizontal y de los incrementos de velocidad vertical (normalizados por la desviación típica), para algunos momentos del periodo de estudio. La elección de la menor escala para mostrar estos resultados se fundamenta es que es precisamente para las menores escalas donde habitualmente se observan más diferencias entre las PDFs.





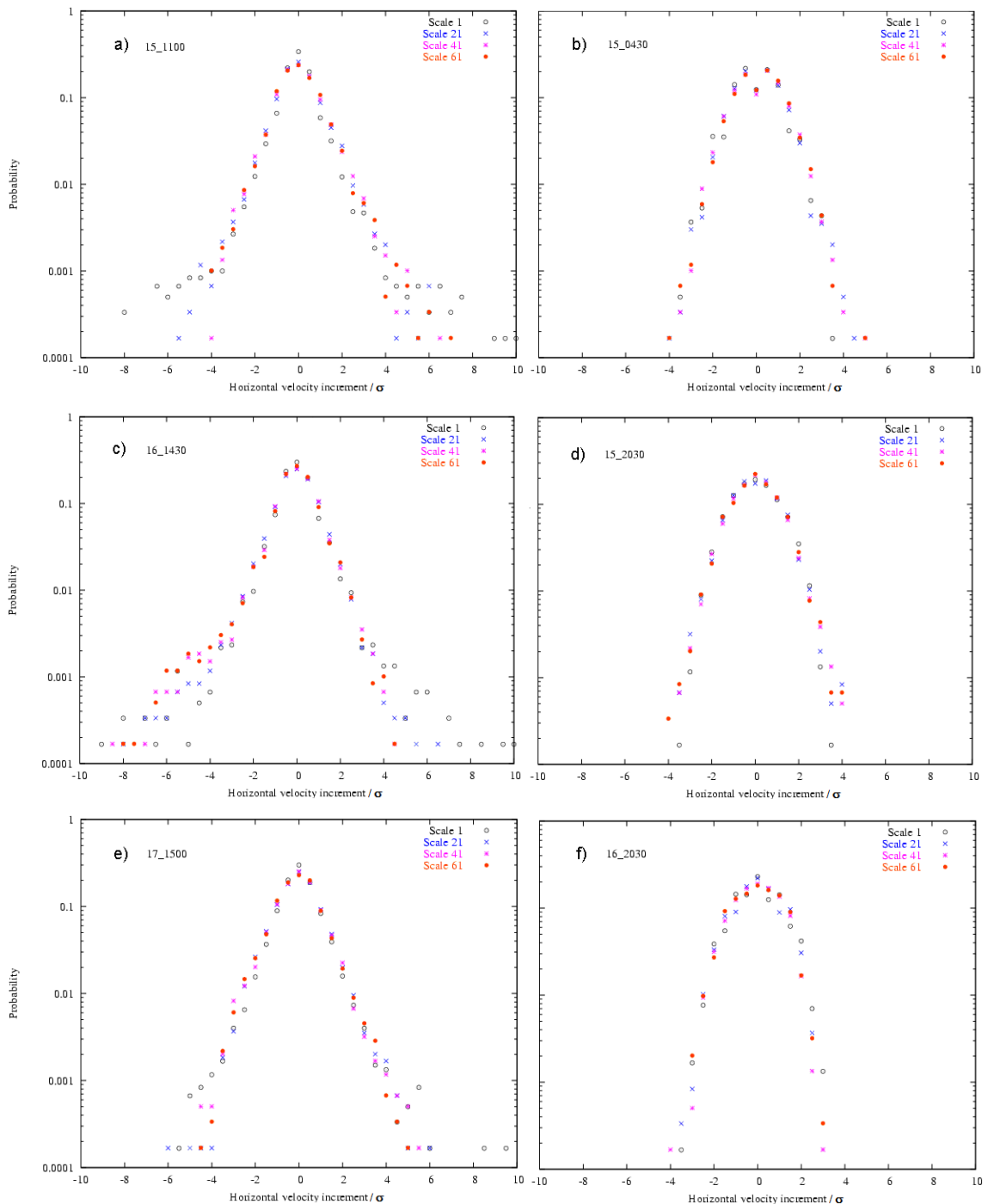
**Figura 4.9:** a), c) y e): PDFs de la velocidad horizontal. b), d) y f): PDFs de la velocidad vertical, para una escala de 1 (s/20) en diferentes situaciones de estudio

Se observa que las PDFs correspondientes a las situaciones diurnas presentan colas más alargadas (mayor presencia de eventos raros) que las correspondientes a las situaciones nocturnas. El hecho de que las funciones de densidad correspondientes a situaciones diurnas sean más alargadas, y por tanto más picudas (mayor probabilidad para incrementos de velocidad iguales a cero) es indicativo de una mayor persistencia (repetición del valor obtenido en un instante al siguiente considerado), en dichas situaciones. En ese sentido, es de esperar la obtención de exponentes de Hurst mayores en los momentos diurnos, como posteriormente veremos. En principio, a partir de la observación únicamente de estas gráficas, no podríamos asegurar que la

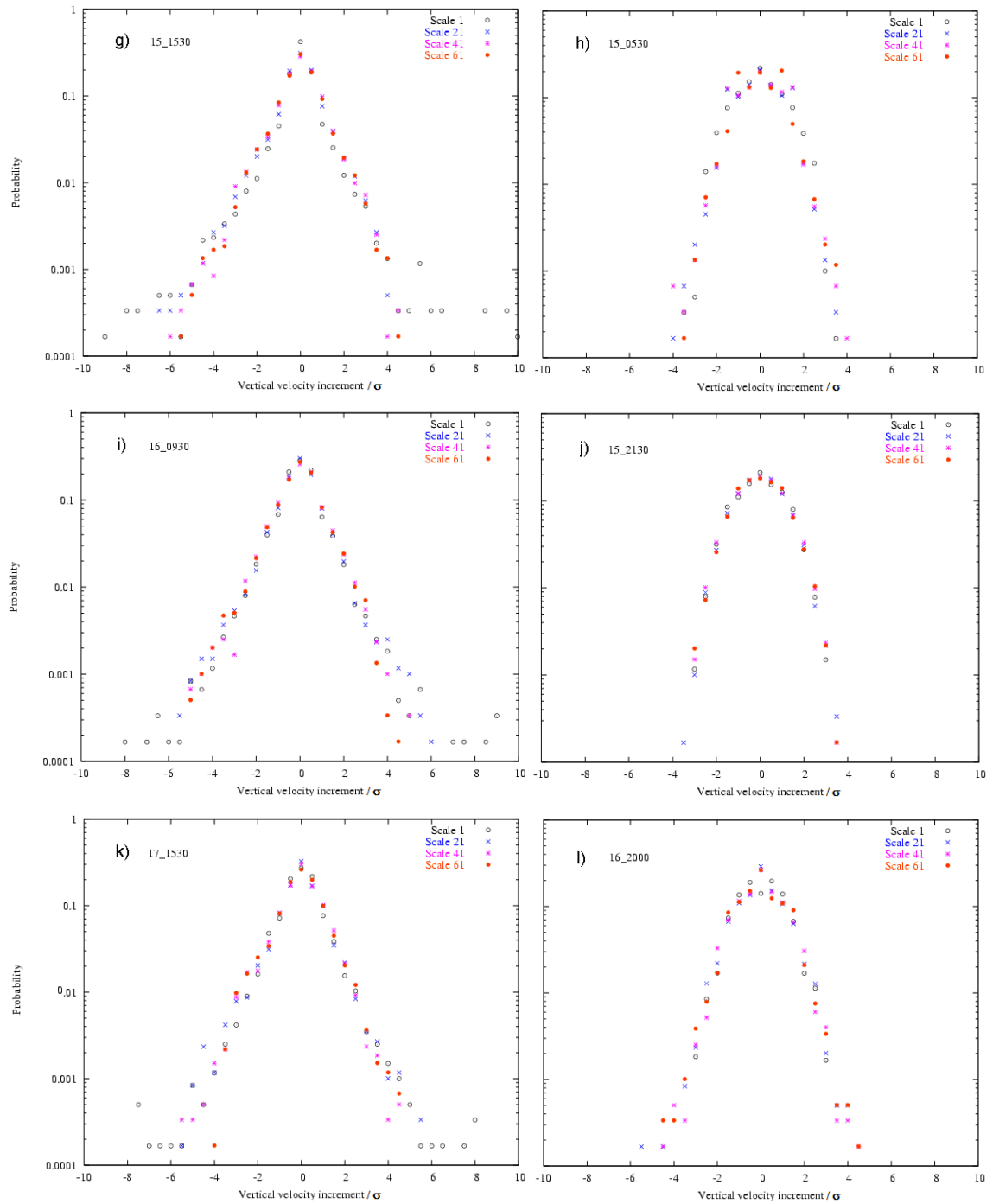


## Estudio de la cascada energética y la intermitencia de la turbulencia en la capa límite atmosférica

intermitencia diurna sea mayor que la nocturna, pues para ello necesitamos valorar la evolución que han experimentado las PDFs al variar la escala. Es decir, no basta con tener la PDF correspondiente a una única escala, la cual sí nos indica el grado de persistencia, y por tanto la dimensión o codimensión correspondiente, pero no contiene la información sobre la evolución que se ha experimentado al variar la escala. Por esa razón, en la Fig. 4.10 hemos representado esa evolución para distintas situaciones diurnas y nocturnas.



## Estudio de la cascada energética y la intermitencia de la turbulencia en la capa límite atmosférica



**Figura 4.10:** PDFs correspondientes a las velocidades horizontales (a), b), c), d), e), f)) y verticales (g), h), i), j), k), l)) para diferentes escalas (61, 41, 21, 1) y diferentes situaciones de estudio

En la Fig. 4.10 (en la que hemos representado, al igual que en la Fig. 4.9, no sólo las funciones de densidad correspondientes a los incrementos de velocidad horizontal, sino también a los incrementos de velocidad vertical) se observa que la variación de la función de densidad con la escala es menos marcada en las situaciones nocturnas

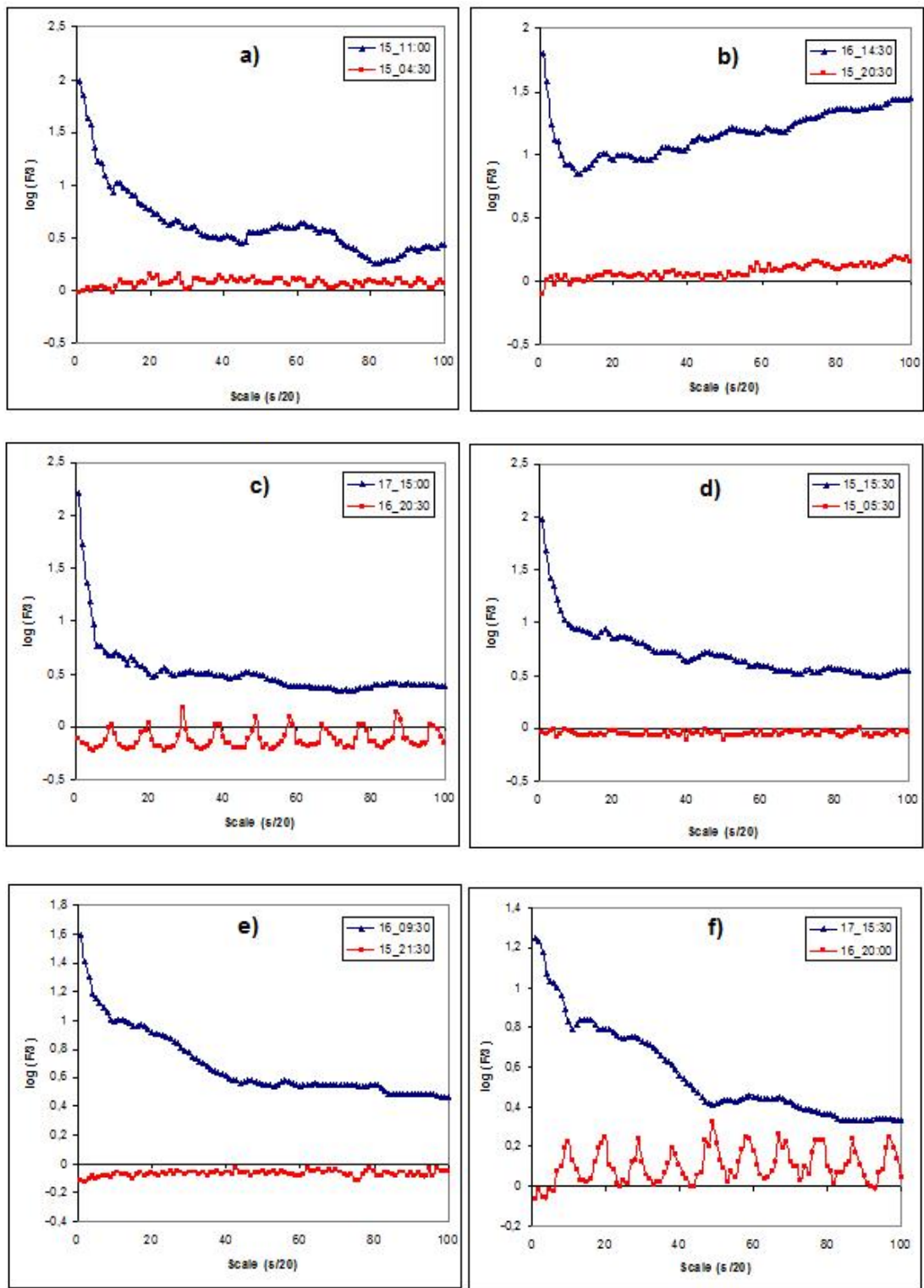
(derecha), en comparación con la que presentan las situaciones diurnas (izquierda) y, en consecuencia, las situaciones nocturnas son menos intermitentes, es decir, con menor variación en la forma de las funciones de densidad con la escala. De hecho, algunas de estas situaciones nocturnas muestran una cierta variación en sentido contrario al habitualmente considerado por los distintos modelos de intermitencia, cerrándose más la PDF al disminuir la escala (en lugar de aumentar sus colas para escalas menores).

#### **4.6.3. Curtosis**

En relación con el punto anterior, y como también hemos señalado con anterioridad, es posible cuantificar la evolución con la escala de las distintas funciones de densidad a través de algún parámetro representativo de la forma de dichas funciones. Ese parámetro puede ser la curtosis (ecuación 3.18), y su modificación de acuerdo con la escala considerada nos indicará el grado de intermitencia existente. Cuanto mayor sea, más picuda será la función de densidad y, en consecuencia, más alargada será la cola.

Hemos representado la evolución de la curtosis (más concretamente del  $\log(F/3)$ , en la Fig. 4.11) para las situaciones de estudio tratadas en el apartado previo, obteniéndose resultados en consonancia con los obtenidos anteriormente. Un valor de 0 de este parámetro,  $\log(F/3)$ , indicaría que estamos en una Gaussiana. Los resultados muestran que se puede apreciar claramente una modificación mucho más importante, al acercarnos a las escalas menores, en el caso de las situaciones diurnas que en el de las nocturnas; es decir, la variación con la escala de las funciones de densidad es mucho más patente en el caso de los momentos diurnos (mayor intermitencia).

## Estudio de la cascada energética y la intermitencia de la turbulencia en la capa límite atmosférica



**Figura 4.11**  $\log(F/3)$  vs. escala para diferentes situaciones de estudio

#### **4.7. Evolución diaria de la intermitencia (Influencia de la estratificación térmica y el viento sobre la intermitencia)**

En los apartados anteriores hemos analizado el grado de intermitencia correspondiente a algunas situaciones de estudio consideradas, y se ha observado una posible correspondencia entre la evolución de las horas del día y el grado de intermitencia. En este apartado veremos con más detalle esa correspondencia a través de la relación entre las horas del día y el valor del coeficiente del término cuadrático ( $\beta$ ) de la función de ajuste a la curva  $\zeta_p$  vs.  $p$ . En efecto, veremos que el parámetro  $\beta$  toma valores negativos para las horas diurnas y que su valor aumenta, llegando incluso en ocasiones a hacerse  $\beta$  positivo, en horas nocturnas. Esos diferentes momentos del día se corresponden con distintas situaciones de estabilidad de estratificación.

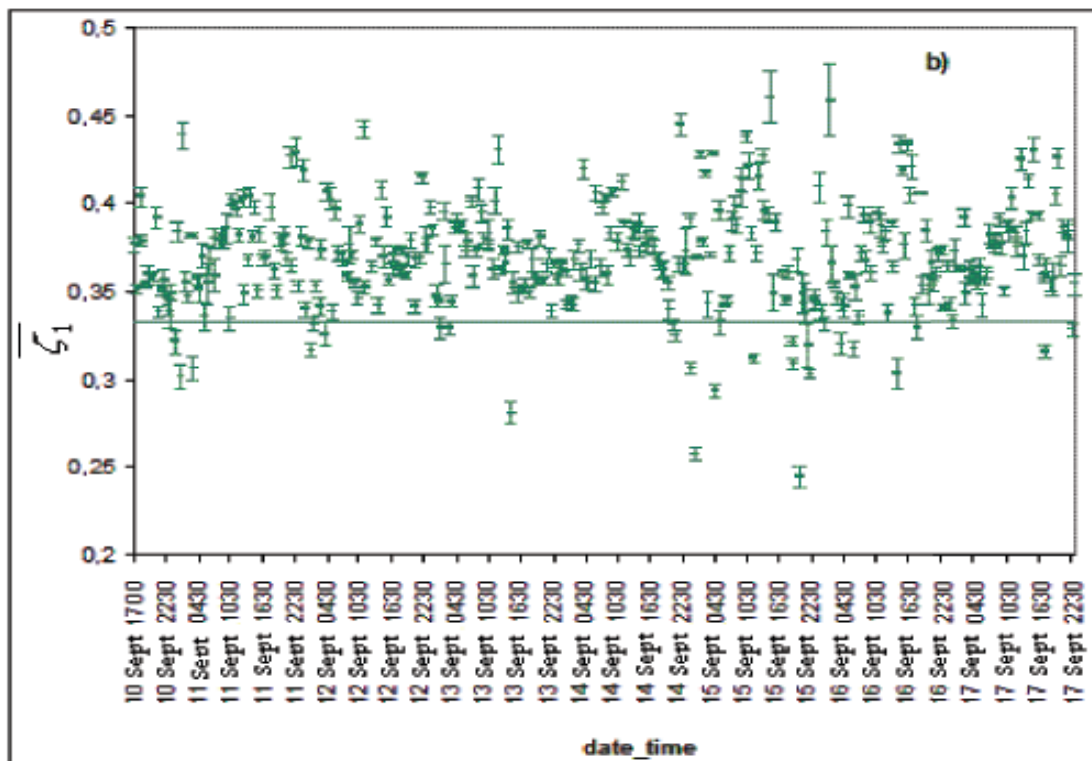
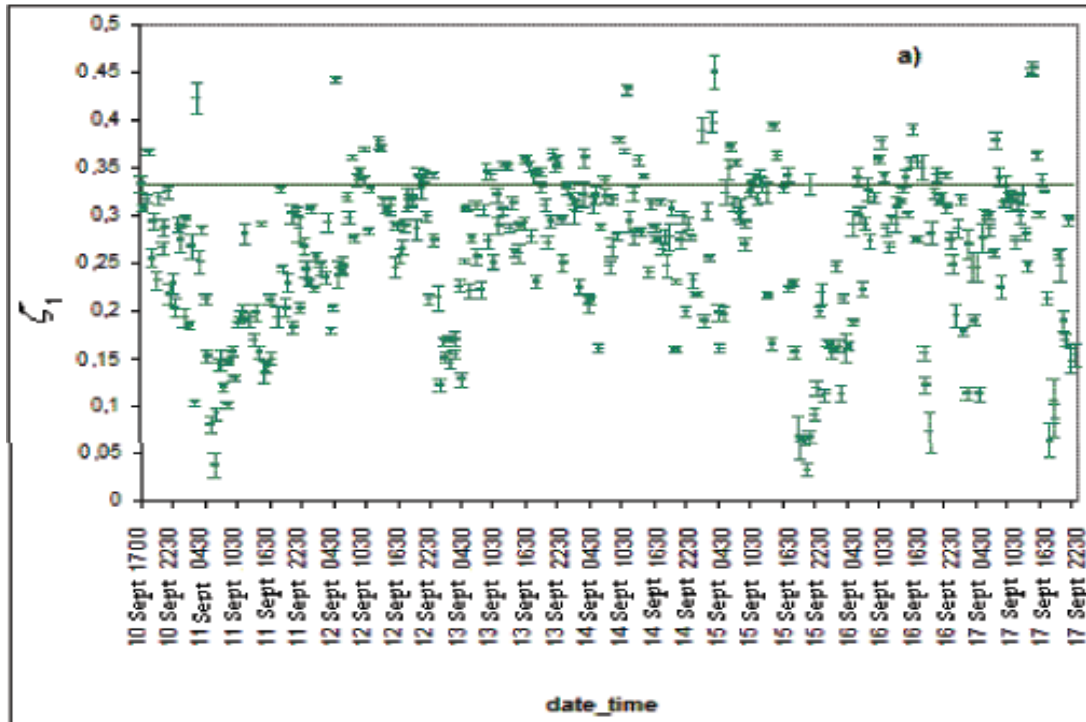
Como ya hemos indicado, para caracterizar el grado de estabilidad térmica correspondiente a cada momento del día hemos utilizado la diferencia de temperaturas entre los niveles de 50 y 0.22m ( $\Delta T_{50-0.22m}$ ); un valor positivo de este parámetro indica una inversión térmica superficial y cuanto más positivo es este parámetro, mayor es la estabilidad.

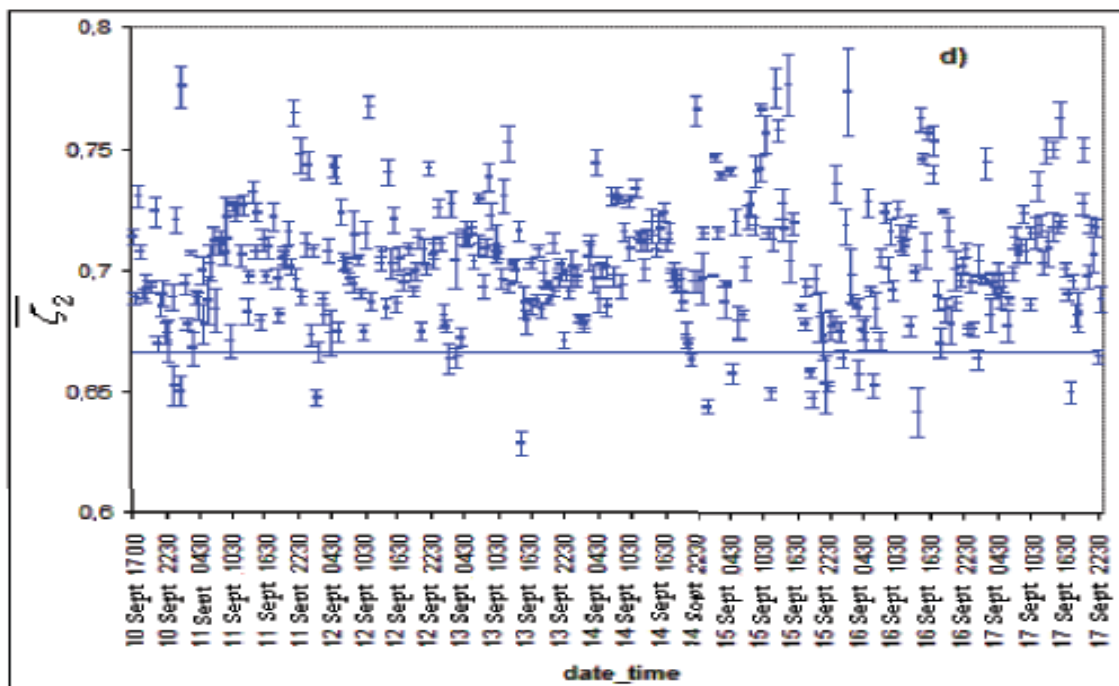
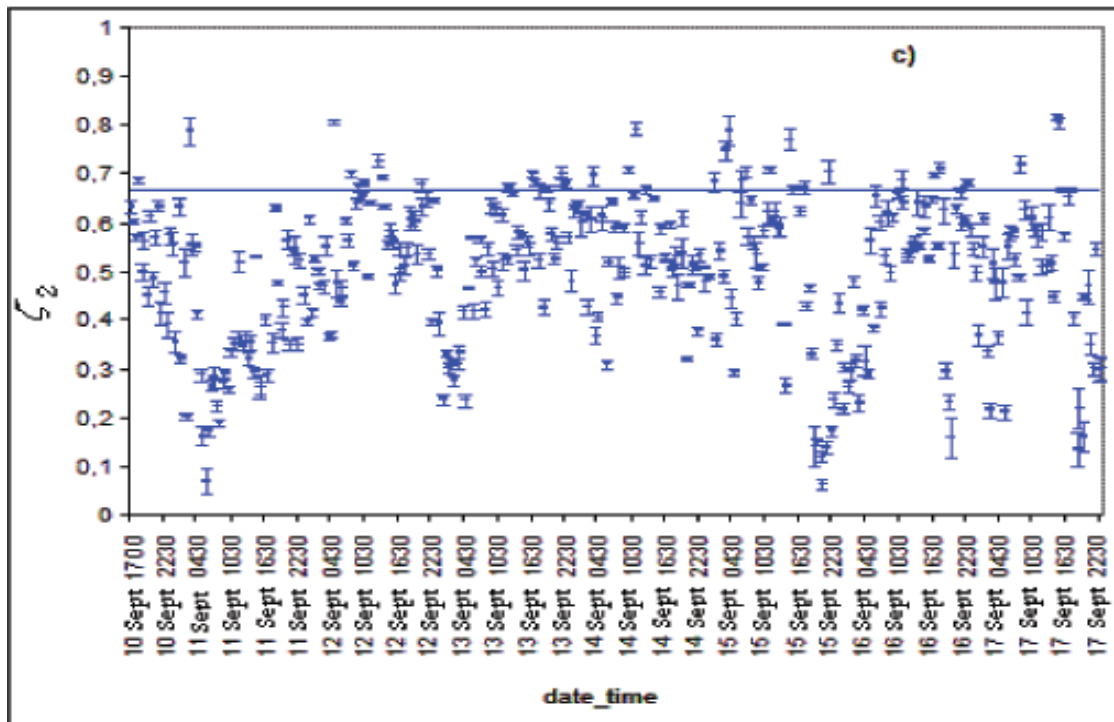
En la Fig. 4.12 hemos representado los exponentes de escala ( $\zeta_p$  y  $\overline{\zeta_p}$ ) con las barras de errores correspondientes para un intervalo de confianza del 99% (para todas las situaciones de estudio las barras de errores correspondientes tanto a exponentes absolutos como a relativos, son inferiores a una desviación estándar); recordemos que para garantizar la convergencia estadística, debido al número de puntos (6000), no es conveniente representar exponentes correspondientes a funciones de estructura de orden superior a 3.

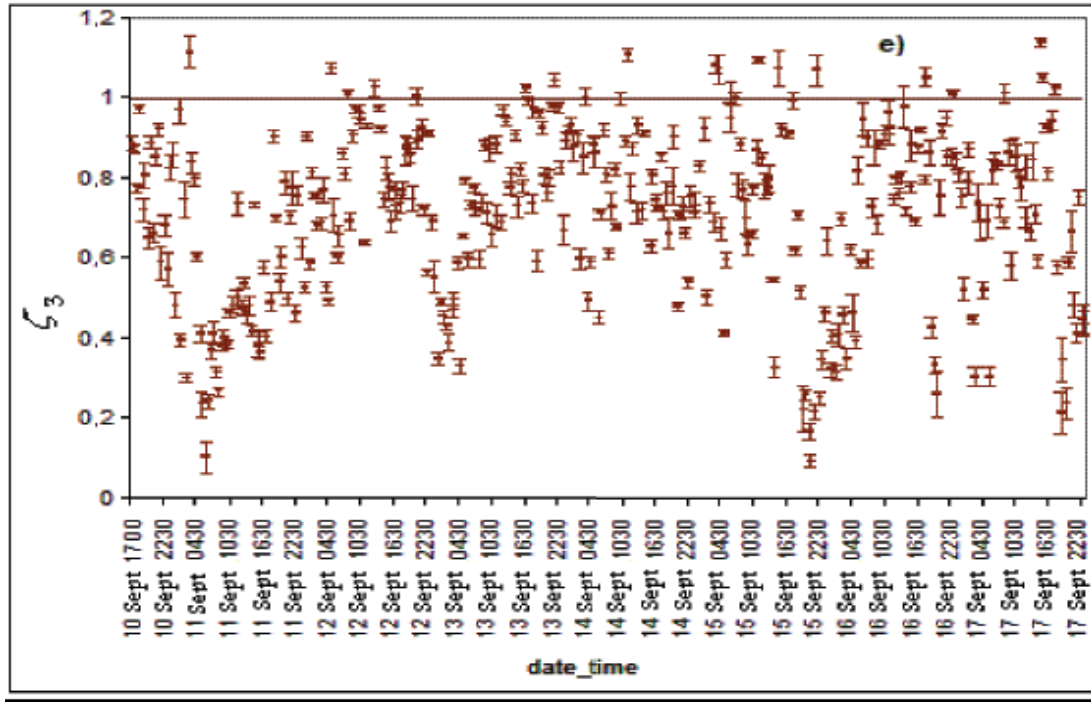
Asimismo, recordemos que, en caso de turbulencia homogénea (más propia de situaciones diurnas) la ley de los 4/5 conlleva que  $\zeta_3$  sea igual a 1. En esos casos, desviaciones importantes de los exponentes de escala de los valores lineales ( $p/3$ )

## Estudio de la cascada energética y la intermitencia de la turbulencia en la capa límite atmosférica

indican un alto grado de intermitencia, es decir, para el caso homogéneo, la ausencia de intermitencia se corresponderá con valores de 0.33, 0.66 y 1 para los órdenes 1, 2 y 3, respectivamente.







**Figura 4.12:** Evolución temporal (del 10 de septiembre de 1998 a las 17:00 GMT al 17 de septiembre a las 23:30 GMT) de los exponentes de escala para varios órdenes de las funciones de estructura: a) y b) orden 1; c) y d) orden 2; e) orden 3; a), c) y e) exponentes de escala absolutos; b) y d) exponentes de escala relativos

Sin embargo, la Fig. 4.12e muestra que la mayor parte de las situaciones presentan un exponente de escala de orden 3 distinto de 1, por lo que podemos decir que la turbulencia casi nunca resulta homogénea. Por ello, aunque la Fig. 4.12 muestra que los valores de los exponentes de escala correspondientes a situaciones nocturnas (más estables) son, por lo general, algo menores que los correspondientes a las situaciones diurnas, no basta con la observación por separado de cada uno de esos exponentes para valorar el grado de intermitencia, sino que para ello es necesario conocer la forma que presenta el conjunto de exponentes de escala frente al orden  $p$  (lo que podemos hacer, como se indica en el apartado 4.6.1, a través del coeficiente del término cuadrático  $\beta$  de la curva cuadrática de ajuste).

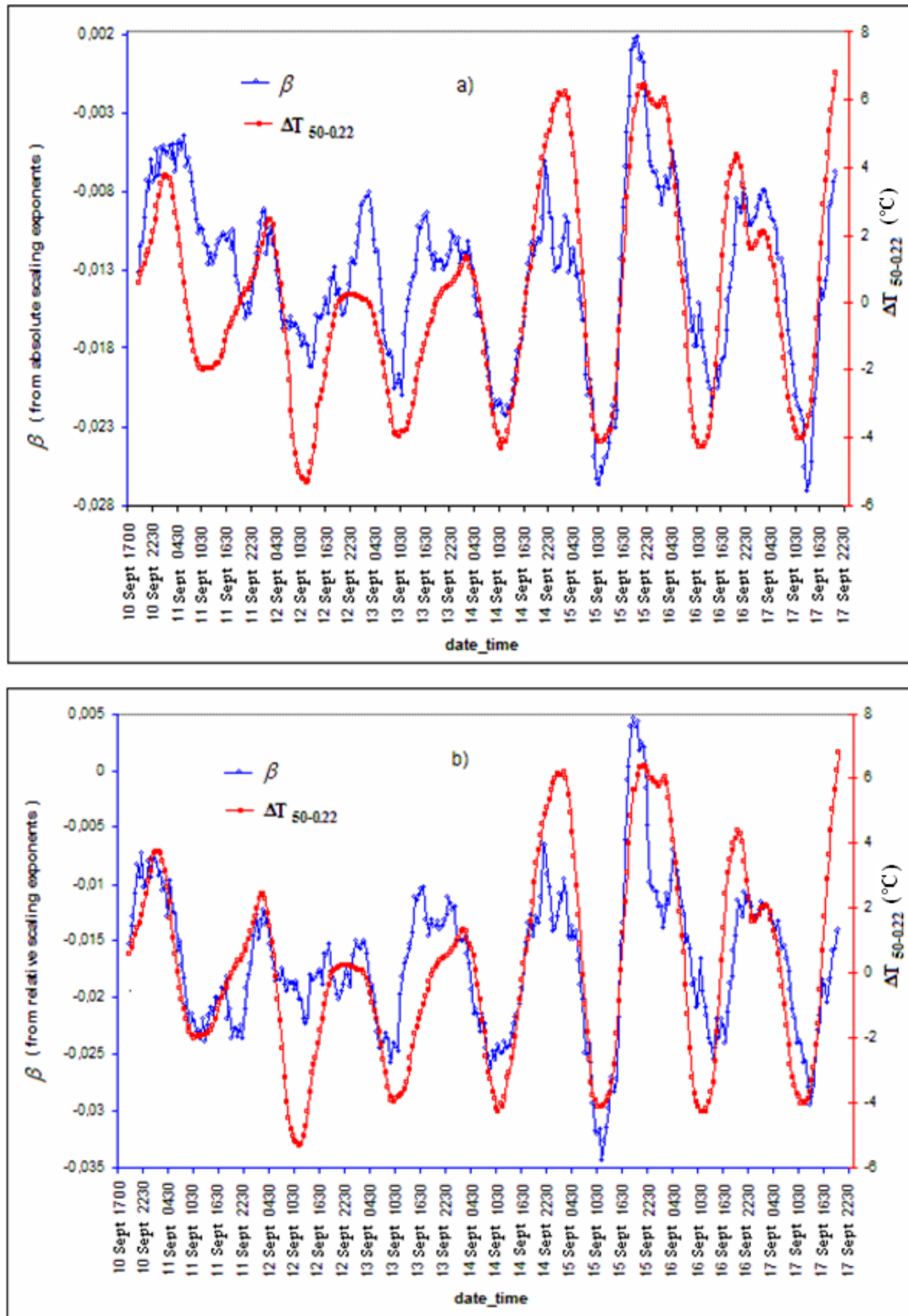
Pero es posible, como decimos, utilizar el coeficiente del término cuadrático ( $\beta$ ) de la función cuadrática de ajuste a la curva  $\zeta_p$  vs.  $p$ , para cuantificar el grado de



curvatura de esas curvas, y así estimar la desviación que presentan las mismas respecto de una forma lineal y, en consecuencia, utilizar esos coeficientes como parámetros indicativos del grado de intermitencia que presenta la turbulencia. De hecho, todos los modelos de intermitencia de turbulencia expresan la relación entre  $\zeta_p$  and  $p$  mediante una función cuadrática (recordemos el modelo log-normal, el modelo  $p$ , el de She-Lèvéque....). En ese sentido, un valor más negativo de  $\beta$  indicará una mayor curvatura cóncava (un valor más positivo, una mayor curvatura convexa). La curvatura cóncava estará asociada, como ya analizaremos con más detalle, con turbulencia totalmente desarrollada (en general, situaciones diurnas convectivas).

Con objeto de evidenciar la relación entre intermitencia y estabilidad, en la propia Fig. 4.13 hemos incluido la evolución temporal del parámetro  $\beta$  y  $\Delta T_{50-0.22}$  (para mostrar con más claridad la correlación existente entre ambas variables hemos utilizado medias móviles de 12 puntos – 6 horas). Esta media se justifica porque existe una alta intravariabilidad a lo largo del día, especialmente en noches con condiciones muy estables (Mahrt 2010), tanto en las condiciones de estratificación como en el coeficiente  $\beta$ , lo que hace que si se utilizan los datos individuales no se observe con claridad ninguna correlación. Sin embargo, la media móvil elegida permite eliminar esa componente irregular de las series y hace más visible la influencia de la estratificación a lo largo del ciclo diurno.

En la Fig. 4.13a el coeficiente del término cuadrático se ha estimado a partir de los exponentes de escala absolutos, y en la Fig. 4.13b a partir de los relativos. La diferencia entre ambas figuras no resulta demasiado significativa, aunque se observa un mejor ajuste entre  $\beta$  y la estratificación en el caso de los parámetros obtenidos a partir de los exponentes relativos.



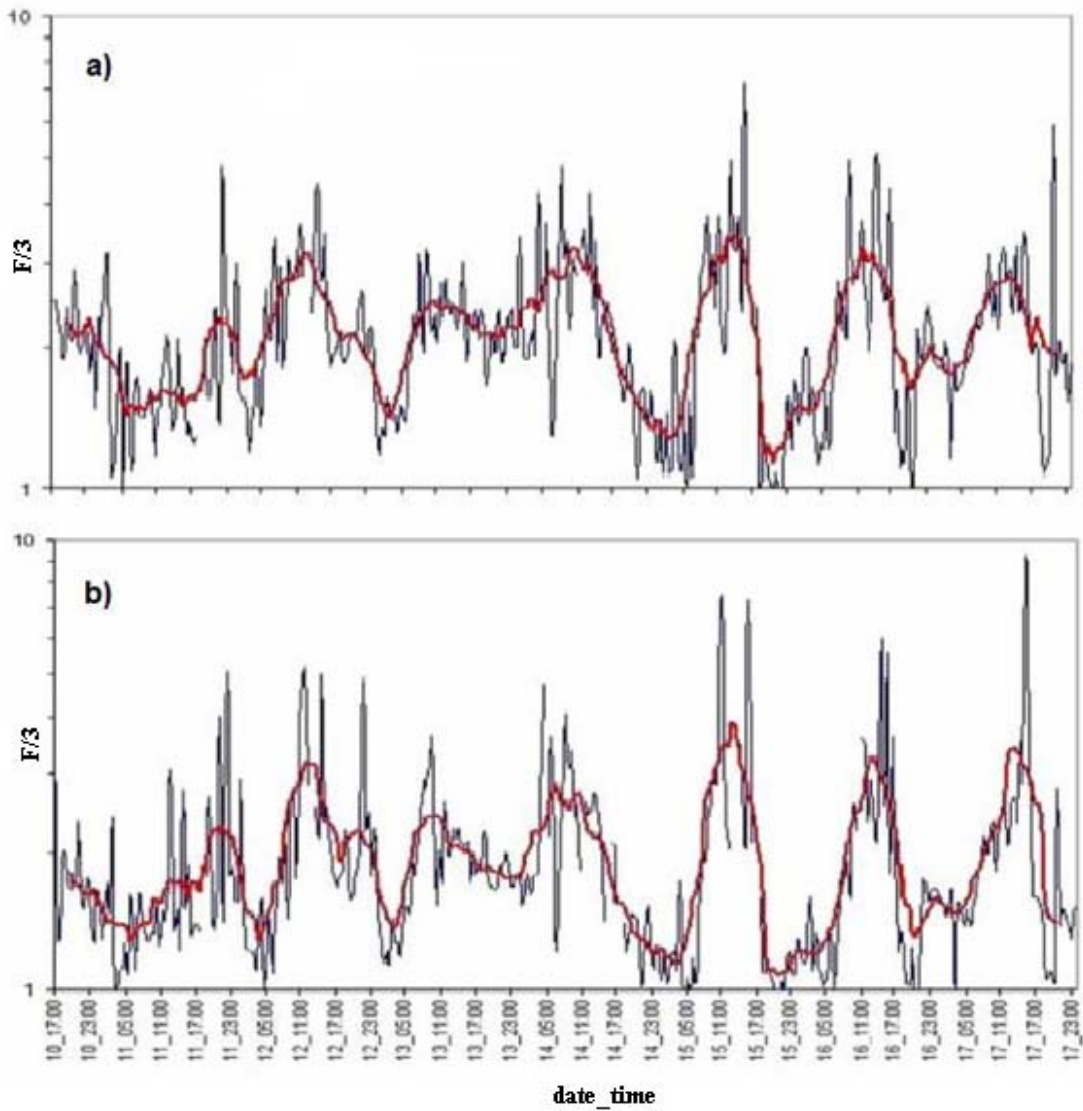
**Figura 4.13:** Evolución temporal (del 10 de septiembre de 1998 a las 17:00 GMT al 17 de septiembre a las 23:30 GMT) de la diferencia de temperaturas entre 50 y 0.22 m y del coeficiente del término cuadrático de: a) los exponentes de escala absolutos vs.  $p$ ; b) los exponentes de escala relativos vs.  $p$

La relación es muy clara: en situaciones diurnas, con fuerte inestabilidad, el valor de  $\beta$  es mucho más negativo, en tanto que, en situaciones nocturnas, mucho más estables,  $\beta$  se hace más próximo a cero, pudiendo incluso llegar a hacerse positivo, como ocurre en algunas noches del segundo periodo (desde la tarde del día 14 en adelante), mucho más estables.

Estos resultados evidencian la relación entre la estratificación y el coeficiente del término cuadrático, así como la influencia de la hora del día. Las situaciones diurnas, debido al efecto de la radiación solar, presentan valores menores de  $\Delta T_{50-0.22}$  (mayor grado de inestabilidad) y, de acuerdo con la Fig. 4.13, presentan un valor más negativo para el parámetro  $\beta$  (más intermitencia). Por otro lado, las noches acostumbran a ser más estables debido a la ausencia de fuerzas convectivas y a la presencia de enfriamiento superficial. La figura muestra que, en comparación con los valores diurnos,  $\beta$  es mayor (próximo a 0), y que incluso puede llegar a ser positivo en situaciones de muy fuerte estabilidad, como es el caso de la noche del 15 de septiembre (para más detalles sobre esas noches, ver Yagüe *et al.* 2006).

También se puede apreciar que, como consecuencia de la situación sinóptica, la amplitud de la onda correspondiente a  $\Delta T_{50-0.22}$  durante el segundo periodo es mayor que durante el primero, lo que también se traduce en una mayor amplitud de la onda correspondiente a  $\beta$  durante ese segundo periodo, es decir produce una mayor variabilidad de la intermitencia de la turbulencia a lo largo del día.

Con objeto de verificar el resultado anterior aplicando otro criterio, en la Fig. 4.14 hemos representado la evolución diurna de la curtosis correspondiente a una escala de 1 s/20. En efecto, situaciones diurnas (más inestables) presentan curtosis mayores, lo que indica que en esas situaciones se produce un mayor alejamiento respecto de la Gaussiana y, en consecuencia una mayor intermitencia. Por el contrario, durante la noche, especialmente en aquellas con mayores estratificaciones estables, las curtosis son menores. Esa relación se muestra utilizando, tanto incrementos de velocidad horizontal (Fig. 4.14a), como de velocidad vertical (Fig. 4.14b).



**Figura 4.14:** Evolución temporal de la curtosis ( $F/3$ ) correspondiente a una escala de 1 s/20 (en escala log). a) de la velocidad horizontal; b) de la velocidad vertical. En ambas graficas se incluye una media móvil (líneas rojas) de orden 12 (6 horas)

Llegados a este punto resulta de gran interés analizar con más detalle los resultados anteriores correspondientes al parámetro  $\beta$ . En efecto, un valor negativo de ese parámetro corresponde a una curva  $\zeta_p$  vs.  $p$  con forma cóncava. En apartados anteriores ya habíamos descrito la necesidad matemática de que dicha curva tuviese esa forma, y que una mayor curvatura en ese sentido se correspondía con un mayor grado de intermitencia. El significado físico de esa intermitencia hace referencia a un aumento en la tasa de energía disipada conforme disminuye la escala. Sin embargo, la necesidad de que la forma de la curva sea cóncava está supeditada por una parte a la existencia de escalamiento entre las funciones de estructura y la escala y, por otra,

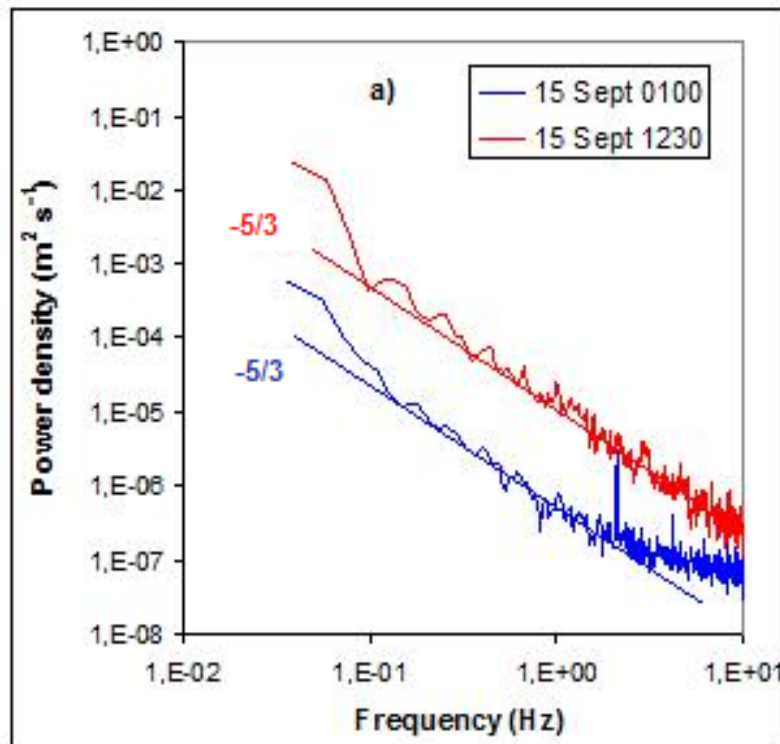
a la posibilidad de poder considerar el flujo como incompresible en números de Reynolds grandes (Frisch 1995), lo que requiere de un régimen de turbulencia totalmente desarrollada. En consecuencia, en ausencia de dicho tipo de turbulencia, podría existir la posibilidad de una curvatura convexa por parte de la función  $\zeta_p$  vs.  $p$ . El significado físico de este tipo de curvatura sería, desde nuestro punto de vista, el opuesto al del caso cóncavo: ahora la tasa de disipación de energía, en lugar de aumentar al disminuir la escala, disminuiría; es decir, se trataría de un comportamiento contrario al que habitualmente se asocia al fenómeno de la intermitencia. Como decimos, este comportamiento no puede producirse en condiciones de turbulencia totalmente desarrollada, y es, efectivamente, en condiciones en las que puede existir esa falta de desarrollo, claramente minoritario en la atmósfera, cuando se ha detectado la curvatura convexa.

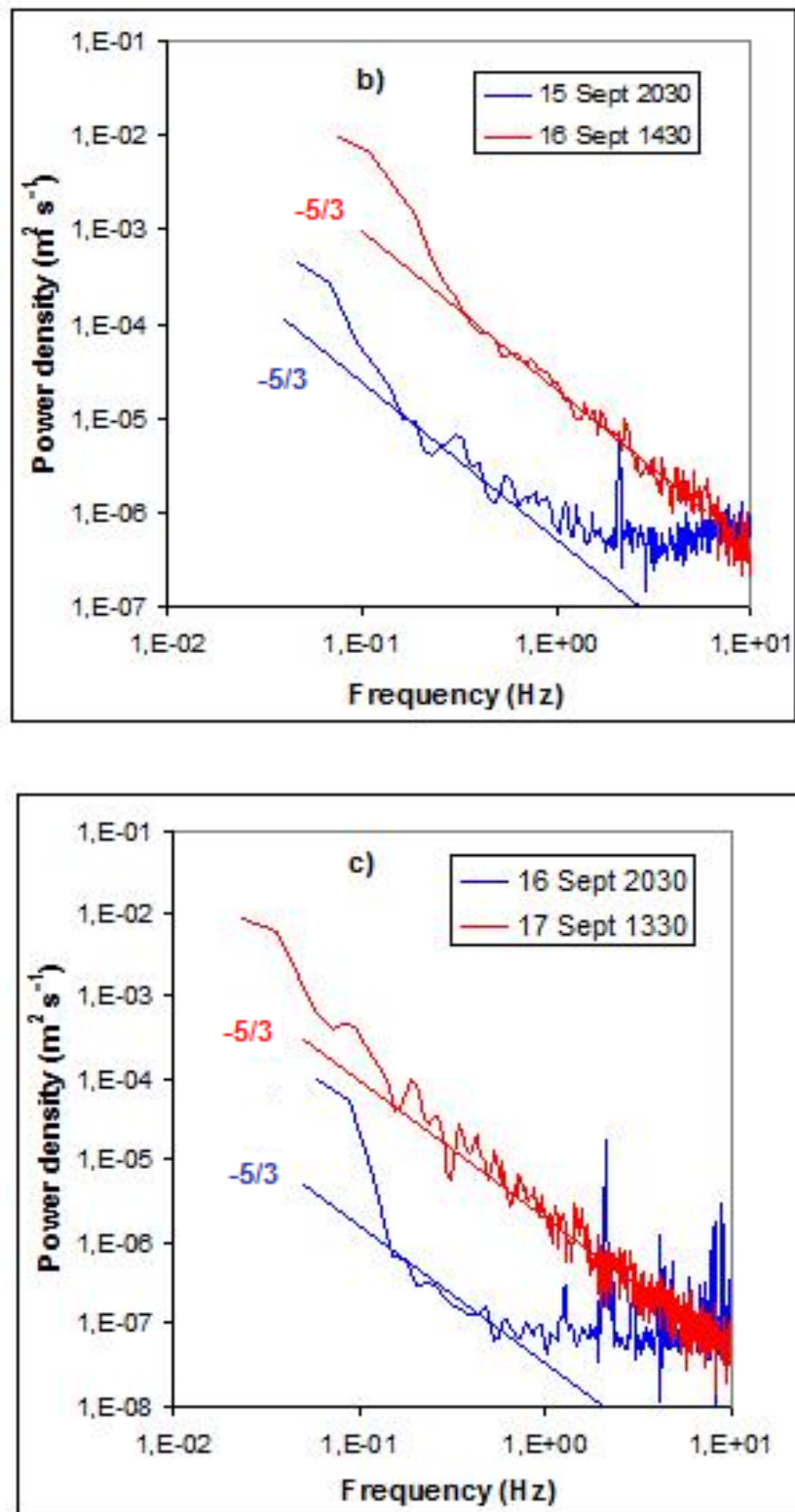
Como puede apreciarse en la Fig. 4.13, los valores de  $\beta$  positivos se producen en situaciones de fuerte estabilidad. En ese tipo de situaciones, los movimientos verticales se ven inhibidos, restringiendo una dimensión y aproximándose a una turbulencia 2D. Además, en esas situaciones, pueden producirse movimientos submesoescalares y ondas (Yagüe & Redondo 1995, Viana *et al.* 2009, Mahrt 2010); las ondas de alta frecuencia pueden quedar atrapadas hasta que, en un momento dado, rompan dando lugar a “reventones” de turbulencia (Terradellas *et al.* 2001, Yagüe *et al.* 2006). Esos “reventones” pueden proporcionar una explicación a los valores positivos de  $\beta$ ; en efecto, como ya hemos comentado, la disipación tiene lugar de manera fundamental en las escalas menores, es decir, la tasa de disipación de energía aumenta al disminuir la escala (intermitencia habitual). Por tanto, y dado que la mayor parte de la energía está contenida en los remolinos mayores (Pope 2000), la tasa de disipación aumenta cuando la energía disminuye. Pues bien, los “reventones” de turbulencia mencionados pueden suponer una aportación de energía adicional a los remolinos de menor tamaño, de tal forma que la energía queda distribuida de forma más uniforme a lo largo de todo el rango de escalas; con ello, la variación con la escala de la tasa de energía disipada puede ser menor (lo que disminuiría la intermitencia) e, incluso, en situaciones extremas,  $\varepsilon_n$  puede disminuir, en lugar de aumentar, cuando la escala disminuye (caso de la forma convexa de  $\zeta_p$  vs.  $p$ ). En

## Estudio de la cascada energética y la intermitencia de la turbulencia en la capa límite atmosférica

definitiva, la esporádica inyección de energía durante el proceso podría estar cambiando el sentido de la intermitencia y justificando el cambio de curvatura.

El proceso explicado en el párrafo anterior se puede justificar a través de la Fig. 4.15. En ella hemos representado el espectro energético (Blackman & Tukey 1958) correspondiente a varias situaciones de especial interés (situaciones con fuerte estabilidad -día 15 de septiembre a las 01:00 GMT, a las 20:30 GMT, y día 16 de septiembre a las 20:30 GMT – que presentan una curvatura convexa en  $\zeta_p$  vs.  $p$ , así como situaciones con la curvatura cóncava habitual – día 15 de septiembre a las 12:30 GMT, día 16 a las 14:30 GMT y día 17 a las 13:30 GMT).





**Figura 4.15:** Densidad de la potencia espectral vs. frecuencia, para varios casos de estudio

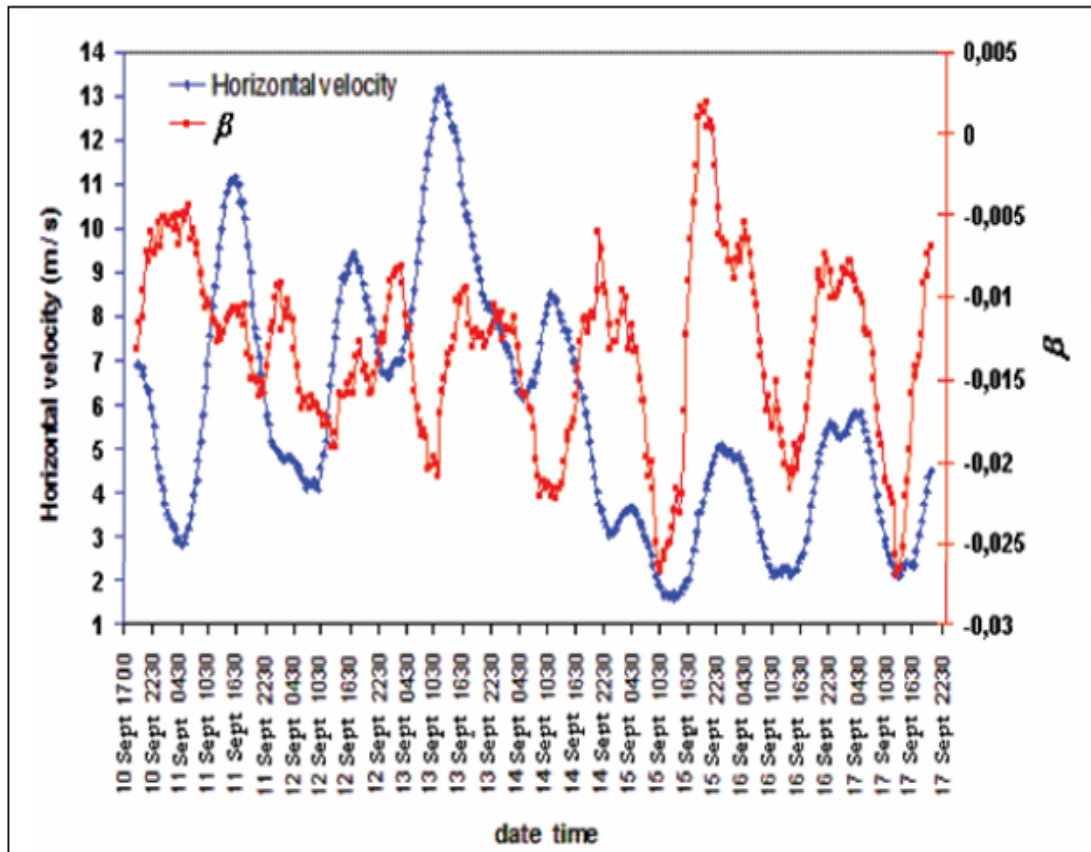
## Estudio de la cascada energética y la intermitencia de la turbulencia en la capa límite atmosférica

---

Esos espectros nos permiten conocer la distribución de la energía cinética entre los remolinos de diferentes tamaños. De acuerdo con esos espectros, se observa que la mayor parte de la energía se encuentra contenida en los remolinos mayores; la energía disminuye, con una pendiente próxima a  $-5/3$  cuando el tamaño de los remolinos disminuye. En las situaciones diurnas la pendiente se conserva, aproximadamente, a lo largo de toda la cascada, con un incremento de las fluctuaciones al final (lo que demuestra la importancia de la intermitencia en las escalas más pequeñas). En situaciones nocturnas con alto grado de estabilidad atmosférica, también se aprecia un incremento de las fluctuaciones en las escalas menores (mayor frecuencia), aunque, además, se aprecia una disminución de la pendiente a partir de un cierto rango de escalas. El incremento de energía correspondiente al cambio en la pendiente puede ser debido a los “reventones” de turbulencia que tienen lugar en noches estables. Ese incremento de energía en las escalas menores está dando lugar a una uniformización energética a lo largo de la cascada, de tal forma que la tasa de energía disipada puede disminuir, en lugar de aumentar al disminuir la escala.

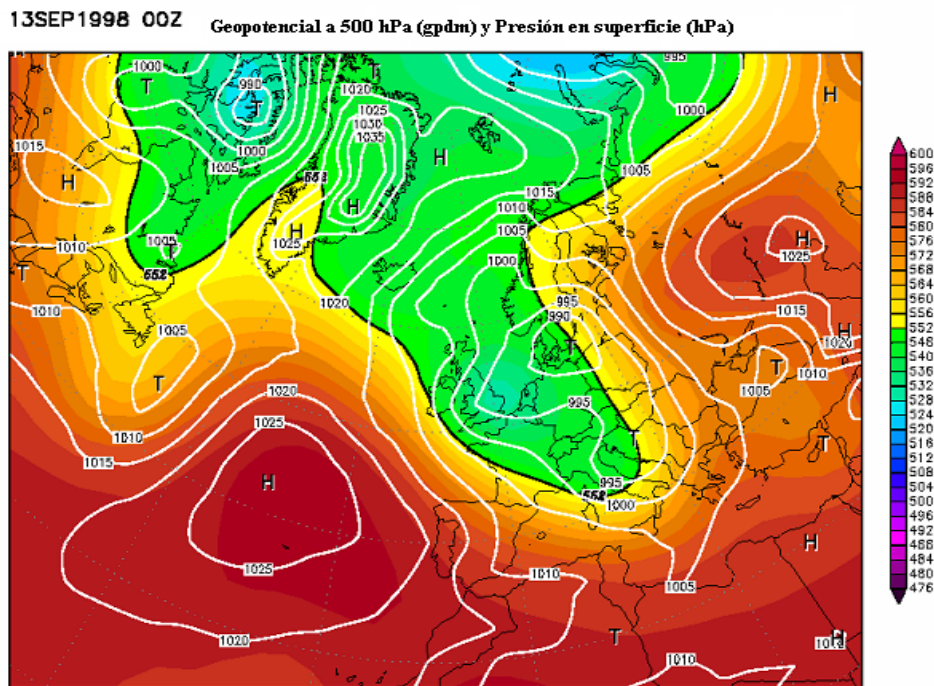
También resulta de gran interés estudiar la posible correlación existente entre viento e intermitencia (representada por el coeficiente  $\beta$  del término cuadrático) a través de la Fig. 4.16, puesto que esa relación también puede contribuir a explicar el resultado anterior.





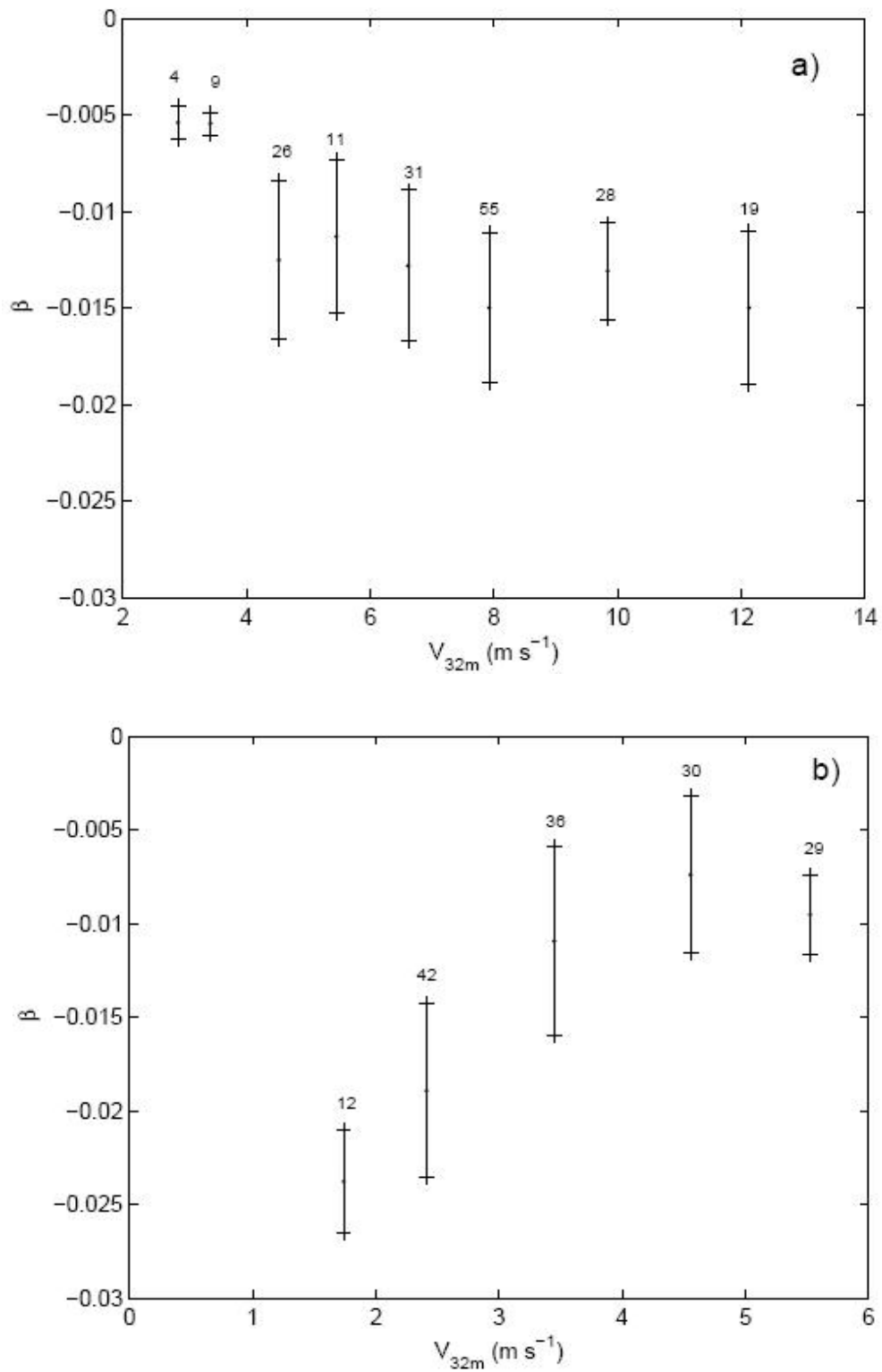
**Figura 4.16:** Evolución temporal (del 10 de septiembre de 1998 a las 17:00 GMT al 17 de septiembre a las 23:30 GMT) del coeficiente del término cuadrático  $\beta$  (obtenido a partir de los exponentes de escala absolutos) y de la velocidad horizontal

En la Fig. 4.16 se pueden distinguir dos periodos en los que el viento muestra un comportamiento diferente: en un primer periodo (del 10 de septiembre a la tarde del día 14 de septiembre), el viento aumenta durante el día y disminuye por la noche, con un valor medio de moderado a alto, en correspondencia con el gradiente de presión sinóptico presente esos días (Fig. 4.17).



**Figura 4.17:** Mapa sinóptico del día 13 de septiembre a las 00:00 GMT. **Fuente:** Reanálisis del NCEP (<http://www.wetterzentrale.de/topkarten>)

Durante ese primer periodo, las diferencias entre el viento diurno y el nocturno son considerables, y la relación entre intermitencia y viento es evidente: cuanto mayor es el viento, menor es el coeficiente  $\beta$  (mayor es la intermitencia). Con objeto de ver de un modo directo la relación entre  $\beta$  y la velocidad del viento, en la Fig. 4.18 se muestran, para diferentes intervalos de viento, los valores medios de  $\beta$  y las correspondientes dispersiones, evaluadas a partir de las desviaciones estándar (la Fig. 4.18a corresponde al primer periodo y la 4.18b al segundo). En la correspondiente al primer periodo se observa que los valores máximos de  $\beta$ , es decir, menores grados de intermitencia, se obtienen para velocidades de viento menores de  $4 \text{ m s}^{-1}$ , en las que además aparecen barras de error pequeñas. Sin embargo, en las horas nocturnas del segundo periodo, los vientos medios son mucho menores (debil gradiente de presión sinóptico, como se muestra en la Fig. 4.19, que corresponde al día 16 de septiembre a las 00:00 GMT), con valores mínimos a lo largo del día y máximos por las noches (lo contrario al primer periodo) y con menores diferencias entre día y noche (Fig. 4.16).



**Figura 4.18:** Parámetro de intermitencia  $\beta$  vs. velocidad del viento a 32 m para a) el primer periodo de estudio y b) el segundo periodo. Las barras de error indican la desviación estándar de los resultados

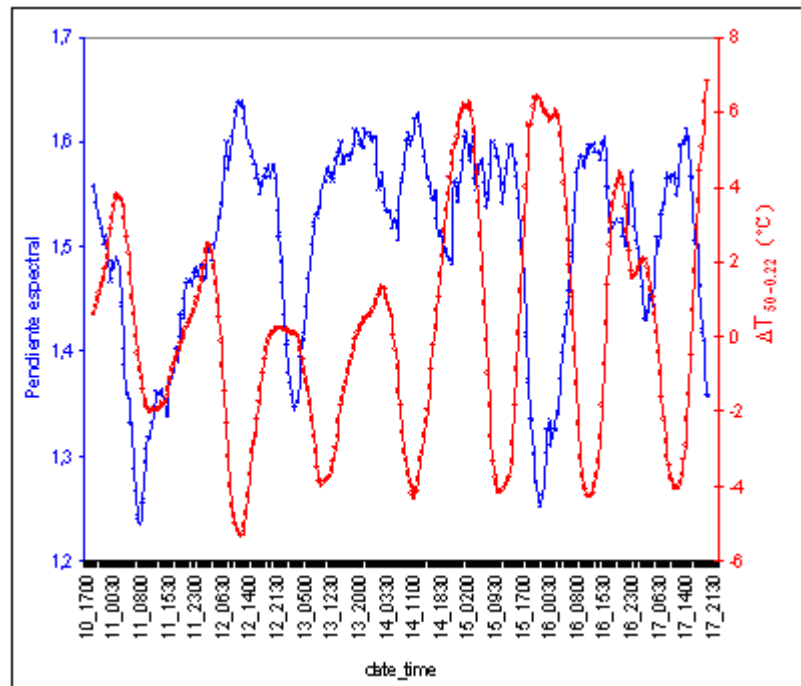


Además, se observa una relación opuesta, respecto al primer periodo, entre el viento y la intermitencia, con valores mayores de  $\beta$  (menor intermitencia) para vientos máximos (noches). Esto se puede justificar por la turbulencia esporádica presente en la mayor parte de las noches estables del segundo periodo, en las que el viento no se relaciona con las condiciones sinópticas, sino con los diferentes procesos a mesoescala o, incluso a submesoescala (vientos catabáticos, ondas de gravedad a diferentes escalas, LLJs, etc) que afectan a la intermitencia de un modo diferente. Para este segundo periodo, la Fig. 4.18b muestra un comportamiento opuesto entre  $\beta$  y el viento: los valores menores de  $\beta$  (en torno a -0.025) se obtienen para los vientos menores, que durante este periodo se presentan durante las horas diurnas.

En resumen, la estratificación térmica ( $\Delta T_{50-0.22}$ ) es el principal factor que afecta a la intermitencia ( $\beta$ ), independientemente de las condiciones sinópticas que afectan al régimen de vientos, tanto por el día como por la noche. Sin embargo, durante la noche, dependiendo de las condiciones sinópticas, la influencia de la velocidad del viento sobre la intermitencia también puede resultar importante.

### **4.8. Pendientes espectrales**

Continuando con el análisis de parámetros que pueden estar relacionados con el fenómeno de la intermitencia, en la Fig. 4.20 hemos representado (suavizando nuevamente las series mediante medias móviles) la evolución temporal de las pendientes, en valor absoluto (obtenidas utilizando la expresión (2.38)) de los espectros de energía junto, de nuevo, a la evolución temporal de la estratificación (a través de  $\Delta T_{50-0.22}$ ).



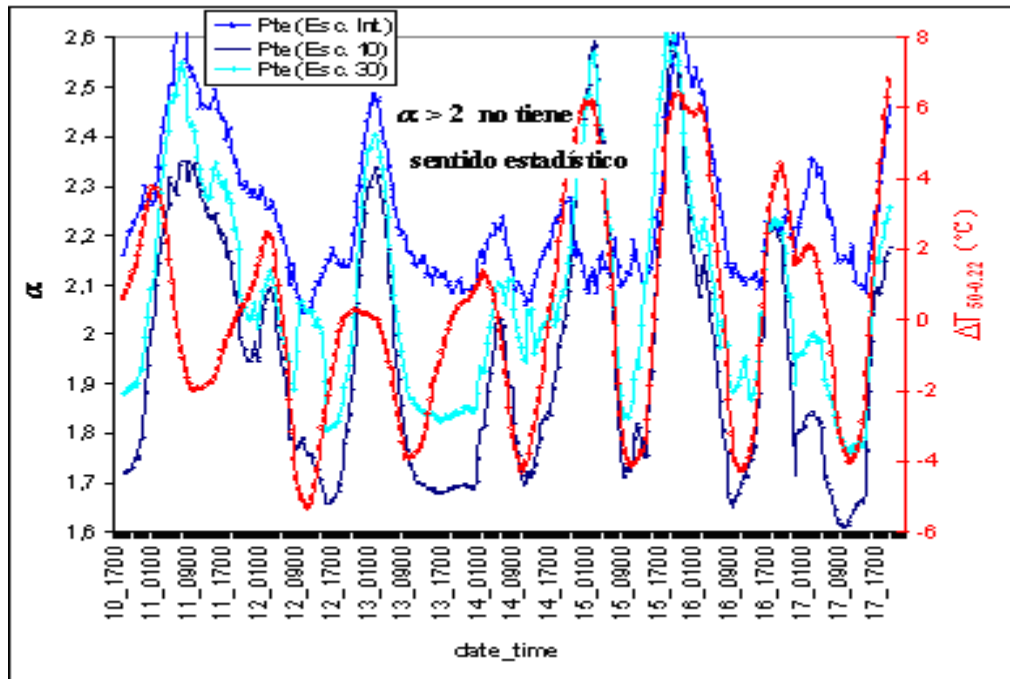
**Figura 4.20:** Evolución temporal (del 10 de septiembre de 1998 a las 17:00 GMT al 17 de septiembre a las 23:30 GMT) de las pendientes de los espectros de energía y de la diferencia de temperaturas entre 50 y 0.22m

Esas pendientes se han obtenido para todo el rango inercial (desde la menor escala considerada (1 s/20) hasta la escala integral) correspondiente a cada situación de estudio. En ese sentido, el habitual descenso de la pendiente característico de las frecuencias más altas (escalas menores) que ya mostrábamos en la Fig. 4.15, reduce la pendiente global para ese rango, por lo que en ningún caso se alcanza el valor de  $-5/3$ , característico de escalas intermedias y mayores. De acuerdo con la Fig. 4.20, las situaciones más estables presentan pendientes menores (como también se observaba en la Fig. 4.15). No se conocen exactamente las causas de ese comportamiento (Mahrt 1997), pero es probable que los siguientes efectos contribuyan al mismo: por un lado, la interacción de ondas de alta frecuencia con la propia turbulencia, junto con los posibles “reventones” de turbulencia causados por esas ondas; por otro lado, la falta de resolución a esas frecuencias tan altas hace que se enmascare la verdadera turbulencia que tendría lugar.

#### **4.9. Parámetros de estabilidad**

Finalmente, resulta de gran interés estimar el tipo de distribución de probabilidad que puede caracterizar las distintas situaciones turbulentas analizadas. Para ello, en la Fig. 4.21 hemos representado la evolución temporal (nuevamente utilizando medias móviles) de la estratificación junto al parámetro de estabilidad  $\alpha$  (parámetro que, recordemos, caracterizaba la distribución de Lévy representativa de la situación turbulenta). Dicho parámetro se ha estimado a partir de la pendiente del espectro correspondiente (ecuación 2.22). En este caso, la representación incluye los resultados obtenidos no sólo considerando el rango inercial en su conjunto (hasta la escala integral), sino también otros rangos de escala (concretamente 10 s/20 y 30 s/20). La razón de incluir el estudio de otros rangos se debe, como muestra la figura, a la incapacidad mostrada por las distribuciones de Lévy para representar la distribución de probabilidad de ninguna situación de estudio si se considera todo el rango inercial. En efecto, el parámetro  $\alpha$  no puede superar el valor 2 (condición necesaria para que esas funciones representen, efectivamente, distribuciones de probabilidad), pero esa superación se produce en todas las situaciones. Sin embargo, cuando se restringe el rango de estudio a escalas menores, cada vez más situaciones pueden ser modelizadas por este tipo de distribuciones; es decir, las distribuciones de Lévy sólo sirven para representar los rangos escalares menores, en los que tiene lugar, de manera fundamental, la intermitencia y que, por tanto, dan lugar a distribuciones con colas más alargadas (forma característica de las distribuciones de Lévy).

Pero además, la figura muestra la relación existente entre el parámetro de estabilidad y el grado de estratificación: situaciones de mayor estabilidad de estratificación presentan un parámetro de estabilidad  $\alpha$  mayor. Centrándonos en el rango de escala menor representado (10 s/20), son precisamente, las situaciones más inestables (diurnas) y, por tanto, más intermitentes, las que pueden ser representadas por distribuciones de Lévy. Sin embargo, cuando la estabilidad aumenta, ni siquiera la reducción del rango de escala permite caracterizar la situación mediante este tipo de distribuciones.



**Figura 4.21:** Evolución temporal (del 10 de septiembre de 1998 a las 17:00 GMT al 17 de septiembre a las 23:30 GMT) de los parámetros de estabilidad ( $\alpha$ ) correspondientes a las distribuciones de Lévy (calculados considerando 3 rangos de escala: 10 s/20, 30 s/20 y la escala integral correspondiente a cada caso) y de la diferencia de temperaturas entre 50 y 0.22 m (los valores de  $\alpha > 2$  no tienen sentido estadístico)

#### 4.10. Modelos de intermitencia

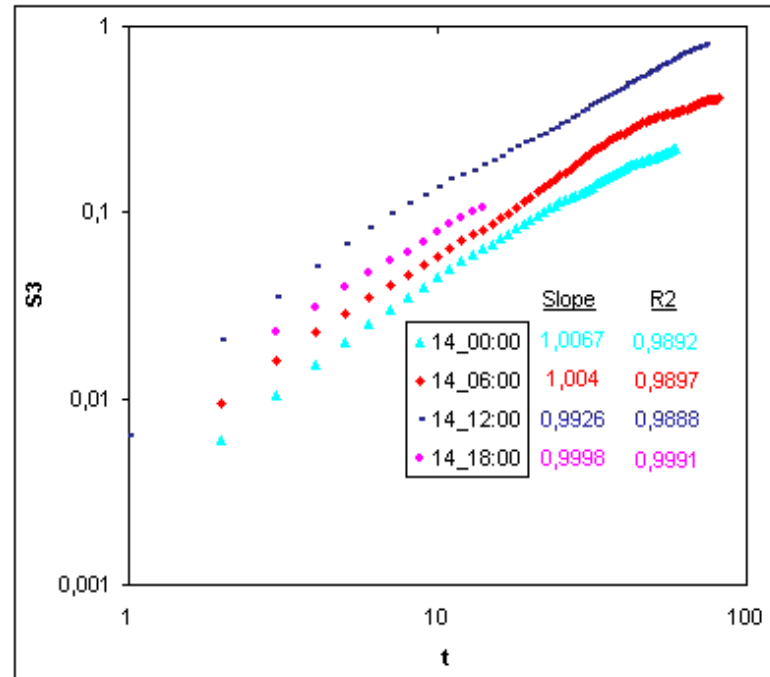
En el capítulo 4 hemos mencionado numerosos modelos, presentes en la bibliografía, que tratan de dar respuesta al fenómeno de la intermitencia presente en la turbulencia. En cualquier caso, todos esos modelos se encuentran limitados al caso de la turbulencia totalmente desarrollada, por lo que no pueden recoger las situaciones reales que aparecen en la atmósfera y, más concretamente, las situaciones de fuerte estabilidad en las que la turbulencia puede no haberse desarrollado totalmente. En esos casos, el fenómeno de la intermitencia tiene un significado físico contrario al que se produce cuando la turbulencia se encuentra completamente desarrollada. Sin embargo, como hemos visto, el coeficiente del término cuadrático de una función cuadrática de ajuste ( $\beta$ ) puede servir como parámetro de referencia para evaluar el grado (y tipo) de intermitencia existente. No obstante, resulta de interés estimar la intermitencia, en aquellos casos para los que sí es posible, es decir, en situaciones de



inestabilidad o de estabilidad moderada, a partir de los modelos de intermitencia clásicos ya mencionados. Para ello, en las expresiones que, para cada modelo, proporcionan los exponentes de escala, basta con sustituir dichos exponentes por el valor empírico y, a partir de ahí, obtener el valor del parámetro o parámetros característico(s) de la intermitencia para ese modelo. A continuación mostramos los resultados de la aplicación de algunos de esos modelos a algunas de esas situaciones.

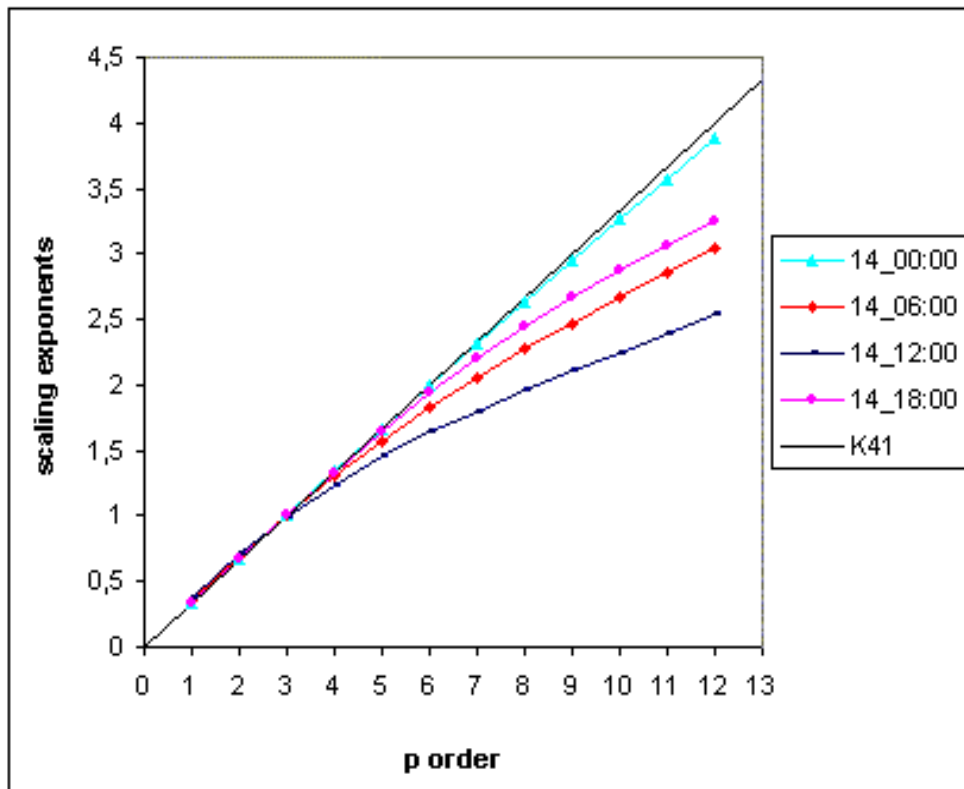
A modo ilustrativo de la estimación de la intermitencia a través de algunos modelos (concretamente el K62 y el modelo  $p$ ), hemos representado los exponentes de escala correspondientes a varias situaciones de estudio (situaciones como hemos dicho, inestables o con ligera estabilidad; en particular, hemos analizado cuatro momentos del día 14 de septiembre: a las 00:00, a las 06:00, 12:00 y 18:00 GMT). Para ello, hemos limitado el rango espectral considerado al llamado rango en el sentido de Kolmogorov, es decir, el rango para el cual se cumple exactamente que  $\zeta_3=1$  (como ya indicamos, esa es una de las condiciones que deben satisfacer los modelos en turbulencia homogénea, y esa es, por tanto, la condición que deben cumplir los dos modelos indicados).

En primer lugar, comprobamos que en ese rango, efectivamente,  $\zeta_3=1$  (Fig 4.22):



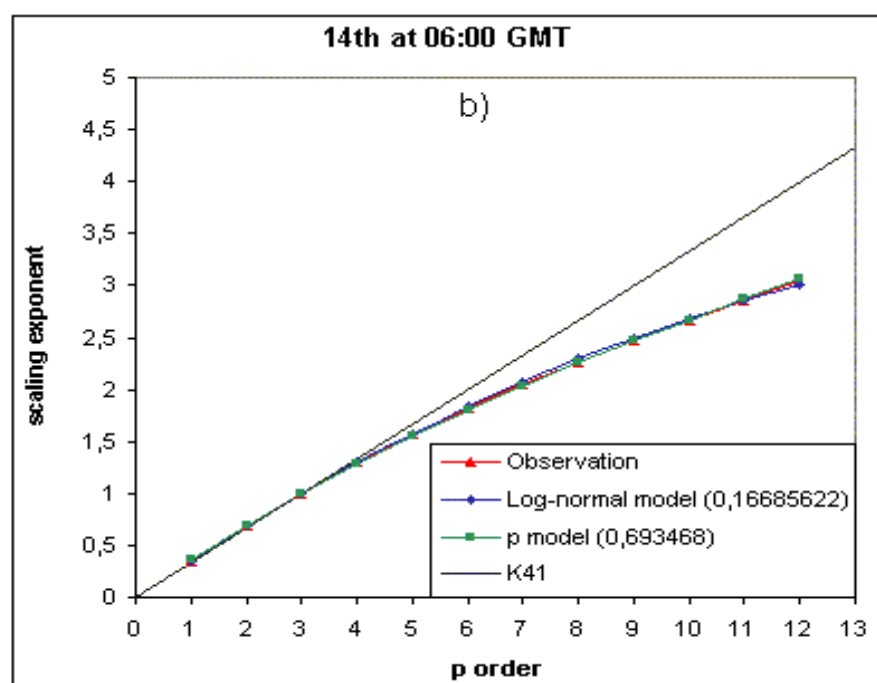
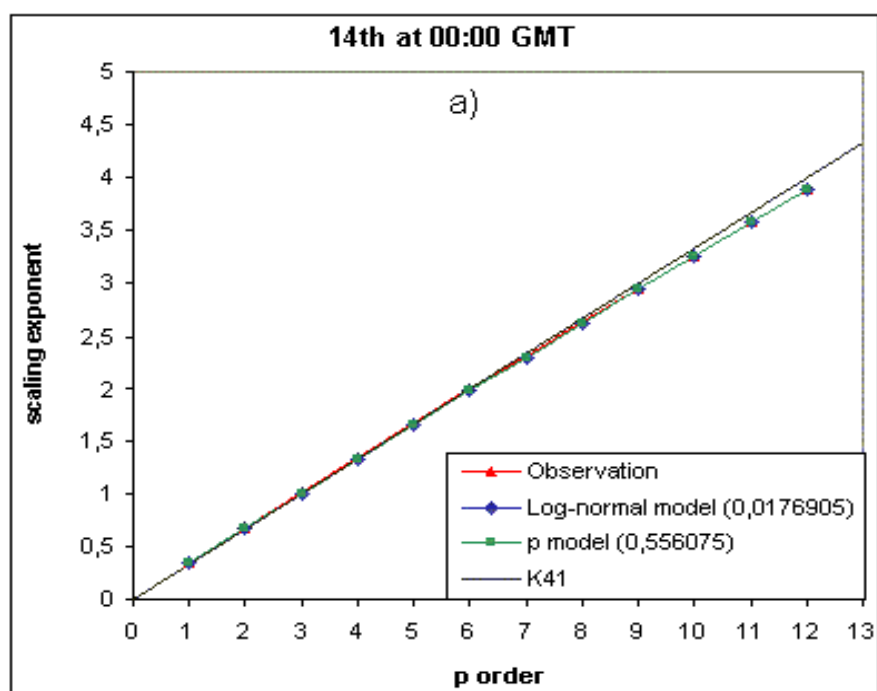
**Figura 4.22:** Pendientes del ajuste lineal por mínimos cuadrados y coeficientes de determinación entre log de la función de estructura de orden 3 y el log de la escala para distintas situaciones de estudio (día 14 de septiembre a las 00:00 GMT, a las 06:00 GMT, a las 12:00 GMT y a las 18:00 GMT)

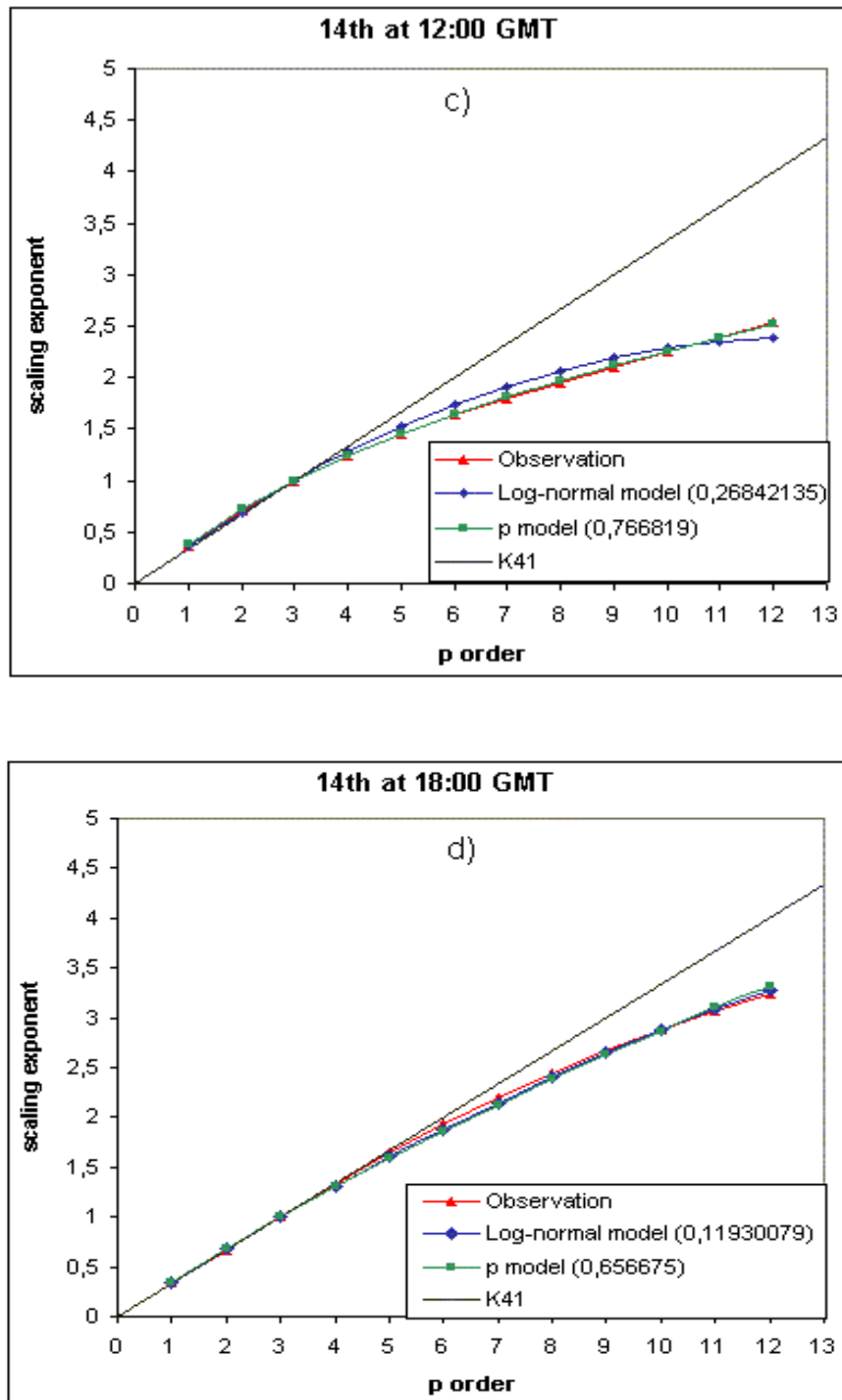
Realizada la verificación anterior, en la Fig. 4.23 hemos representado los exponentes de escala correspondientes ( $\zeta_p$  vs.  $p$ ). En dicha figura, a pesar de la falta de convergencia estadística para órdenes mayores que 3 (ya indicada, debido al número de datos con el que trabajamos), y en aras a una representación visualmente más evidente, hemos querido mostrar los exponentes correspondientes hasta el orden 12. En realidad, la falta de convergencia estadística para los órdenes altos no supone una modificación significativa en los resultados obtenidos al considerar únicamente órdenes con un elevado grado de convergencia, pues la forma de la curva marcada por los órdenes bajos se mantiene al considerar los altos. De hecho, al realizar un análisis del grado de convergencia estadística (Apéndice VI), se observa que ese grado disminuye al considerar escalas menores, donde la intermitencia tiene mayor importancia, por lo que incluso se podría pensar que la ausencia de convergencia podría estar motivada también por la existencia de intermitencia, y no sólo por el número de datos.



**Figura 4.23:** Exponentes de escala (calculados considerando rangos en el sentido de Kolmogorov) vs. orden de las funciones de estructura para distintas situaciones de estudio (día 14 de septiembre a las 00:00 GMT, a las 06:00 GMT, a las 12:00 GMT y a las 18:00 GMT)

A continuación, podemos sustituir los exponentes de escala en las expresiones dadas por los distintos modelos, para esos exponentes, y a partir de ahí, obtener el parámetro que caracteriza el grado de intermitencia en cada modelo (el parámetro  $\mu$  en el caso del log-normal, y el parámetro  $p$  en el caso del modelo  $p$ ) (Fig. 4.24).





**Figura 4.24:** Exponentes de escala (calculados considerando rangos en el sentido de Kolmogorov para los datos considerados, obtenidos por diferentes métodos) vs. orden de las funciones de estructura para distintas situaciones de estudio; a) día 14 de septiembre a las 00:00 GMT; b) día 14 a las 06:00 GMT; c) día 14 a las 12:00 GMT y d) día 14 a las 18:00 GMT)

## Estudio de la cascada energética y la intermitencia de la turbulencia en la capa límite atmosférica

---

En las situaciones mostradas a título de ejemplo, correspondientes a cuatro momentos distintos a lo largo del día 14, la evolución diurna de la intermitencia queda patente. En efecto, la situación más nocturna (las 00.00 GMT) presenta la menor intermitencia (prácticamente inexistente); esa intermitencia se hace mayor para situaciones algo más inestables (las 06:00 y las 18:00 GMT), y a las 12:00 GMT, es decir, en la situación más convectiva, se alcanza la máxima intermitencia.

Los modelos reflejan perfectamente estos grados de intermitencia. Así, el modelo log-normal presenta un valor para el coeficiente de intermitencia,  $\mu$ , prácticamente igual a cero a las 00:00 GMT, es decir, cuando casi no existe intermitencia. El valor de  $\mu$  aumenta a las 06:00 y a las 18:00 GMT (0.1668 y 0.1193 respectivamente) que coinciden aproximadamente con la salida y puesta del sol respectivamente, y alcanza su mayor valor (0.2684) en la situación de mayor intermitencia, es decir, a las 12:00 GMT. Lo mismo ocurre con el modelo  $p$ , cuyos valores para el parámetro  $p$ , indicativo del grado de intermitencia, son respectivamente 0.556, 0.6934, 0.6566 y 0.7668, para las 00:00, 06:00, 18:00 y 12:00 GMT (para este modelo, la ausencia de intermitencia se corresponde con un valor del parámetro  $p$  igual a 0.5, y conforme aumenta ese valor, mayor es el grado de intermitencia).



## **5. Intermittencia en otros ámbitos (mercados financieros)<sup>6</sup>**

---

<sup>6</sup> Parte de los resultados presentados en este capítulo ya han sido publicados, o se encuentran en revisión, en:

- Vindel JM & Trincado E (2010) The timing of information transmission in financial markets, *Physica A* 389:5749-5758
- Trincado E & Vindel JM (2012a) Not fully developed turbulence in the Dow Jones index (Submitted to *Brazilian Journal of Physics*)



### **5.1. Turbulencia en los mercados financieros**

Resulta de interés estudiar si el análisis sobre turbulencia llevado a cabo en la atmósfera es extrapolable a otros campos en los que esté presente la variabilidad. Un claro ejemplo de ello son los mercados financieros. En efecto, matemáticamente, la componente aleatoria de las series económicas refleja claramente lo que se podría entender como un comportamiento turbulento. La diferencia entre los valores en dos instantes de un cierto índice financiero puede ser interpretado como la variación de ese índice a una cierta escala (la escala correspondiente a la separación, en tiempo, entre los dos valores); por tanto, esa diferencia de valores hace las veces de la velocidad del fluido, a esa escala, en la dinámica de fluidos.

La relación entre física y economía ha experimentado un importante desarrollo en los últimos años (Mantegna & Stanley 1996, Mantegna & Stanley 2000, Lofredo 2004), existiendo una amplia literatura económica en relación a la cascada turbulenta (Ghashghaie *et al.* 1996, Lux 2001, Nawroth & Peinke 2007). En el dominio económico la energía transferida entre remolinos se puede interpretar como la información transferida de una situación a la siguiente (el grado de confianza y el riesgo tomado por los inversores dependen de la información disponible en cada momento), es decir, la información en los mercados financieros puede proceder de situaciones anteriores conocidas (energía transferida desde los remolinos turbulentos mayores), aunque también puede ser inyectada desde fuera un poco antes. Por tanto, una parte de la información se transmite a los valores subsiguientes y así sucesivamente, en tanto que el resto de la información se pierde (se disipa), al igual que ocurre con la energía.

Al igual que en la cascada de remolinos turbulentos, los mercados financieros presentan una escala integral (máximo periodo de tiempo que podría afectar a la decisión de los inversores). Esta escala depende de cada mercado y el periodo transcurrido desde la escala integral a las escalas menores (escalas en las que la información ya no es transmitida, sino disipada) es, análogamente, el rango inercial.

El escalamiento también aparece en los datos económicos (Muller *et al.* 1990, Mantegna & Stanley 1995, Brock 1999, Dacorogna *et al.* 2001, Gencay *et al.* 2001, Lux 2003, Di Matteo *et al.* 2005, Di Matteo 2007, Gabaix 2008) y, por tanto, los conceptos e ideas expuestas a lo largo de la tesis en relación a la intermitencia de la turbulencia se pueden aplicar en el campo económico (Trincado & Vindel 2012b).

Sin embargo, los índices financieros pueden presentar una falta de estacionariedad en relación no sólo a la volatilidad de los mercados, sino también en relación a la tendencia, ciclos y estacionalidad de los mismos (Matassini 2001). Esta falta de estacionariedad supone, ciertamente, una limitación para la analogía expresada entre turbulencia y mercados, por lo que los resultados sobre la intermitencia en los mercados obtenidos aplicando las metodologías expuestas a lo largo del trabajo, deben ser analizados posteriormente para verificar si responden adecuadamente a la realidad representada.

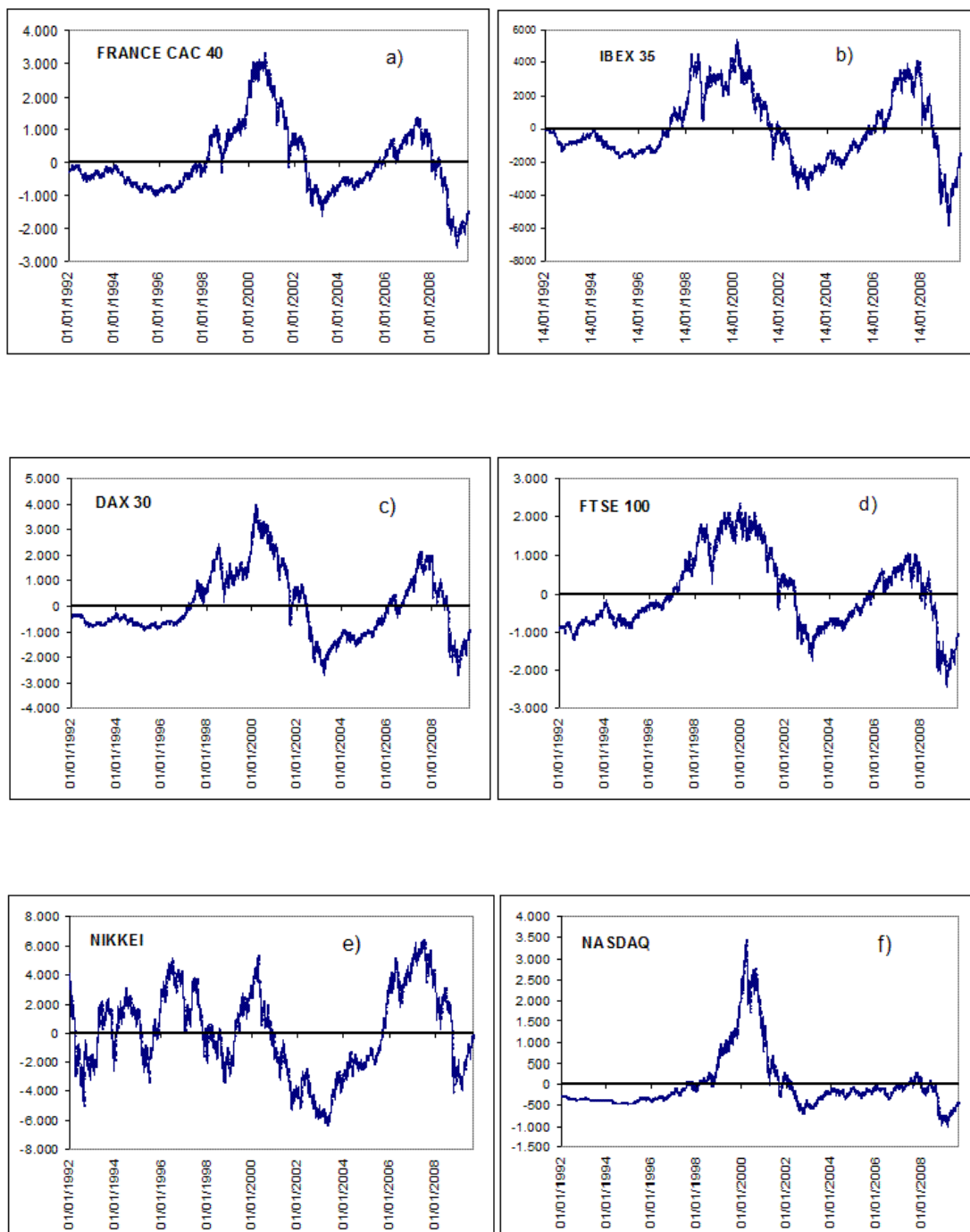
### **5.2. Intermitencia y comportamiento anómalo**

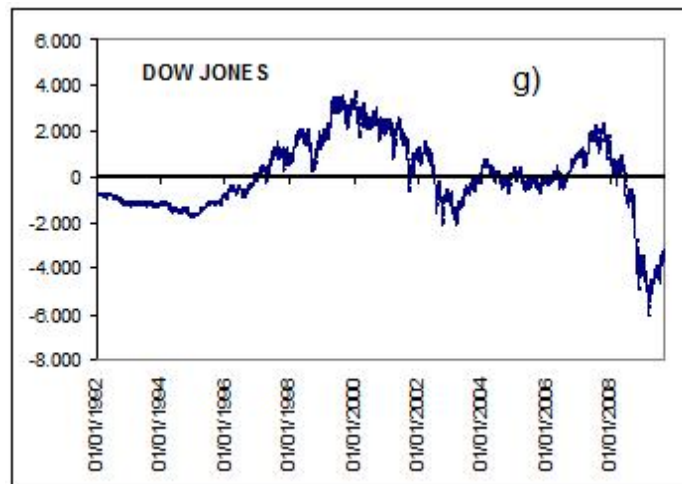
Para nuestro estudio hemos utilizado los datos de cierre diarios de varios índices bursátiles; concretamente, algunos índices correspondientes a varias economías de la eurozona (el *FTSE100* británico, el *CAC40* francés, el *DAX30* alemán y el *IBEX35* español), a Estados Unidos (el *NASDAQ* y el *DOW JONES*) y a Japón (el *NIKKEI*). El periodo de estudio elegido va del 1 de enero de 1992 al 31 de agosto de 2009.

En primer lugar, en la Fig. 5.1 hemos representado la evolución temporal de los índices utilizados para el estudio. Para reducir la falta de estacionariedad que pueden presentar los datos financieros, hemos eliminado la tendencia original de los *datasets*. La figura muestra claramente la presencia de saltos, que representan grandes incrementos o decrementos en el valor de los índices; estos saltos se corresponden con informaciones explosivas que afectan al índice a corto plazo, y por tanto su presencia está asociada a eventos raros y esporádicos. Si esos eventos se volvieran habituales, el mercado prevería su aparición, haciéndolos por tanto menos explosivos. De acuerdo con la Fig. 5.1, el *NASDAQ* presenta menos saltos que el resto de índices. Esto parece razonable, pues el *NASDAQ* sólo incluye empresas de alta tecnología en electrónica, informática, telecomunicaciones, etc; por tanto, se

## Intermitencia en otros ámbitos (mercados financieros)

trata de un índice limitado a un espectro muy estrecho de actividades y, en consecuencia, es poco probable que se vea afectado por noticias inesperadas. El pico que presenta en torno al año 2000 se debe a la burbuja experimentada ese año por las empresas tecnológicas, sobre todo, por las *puntocom*.

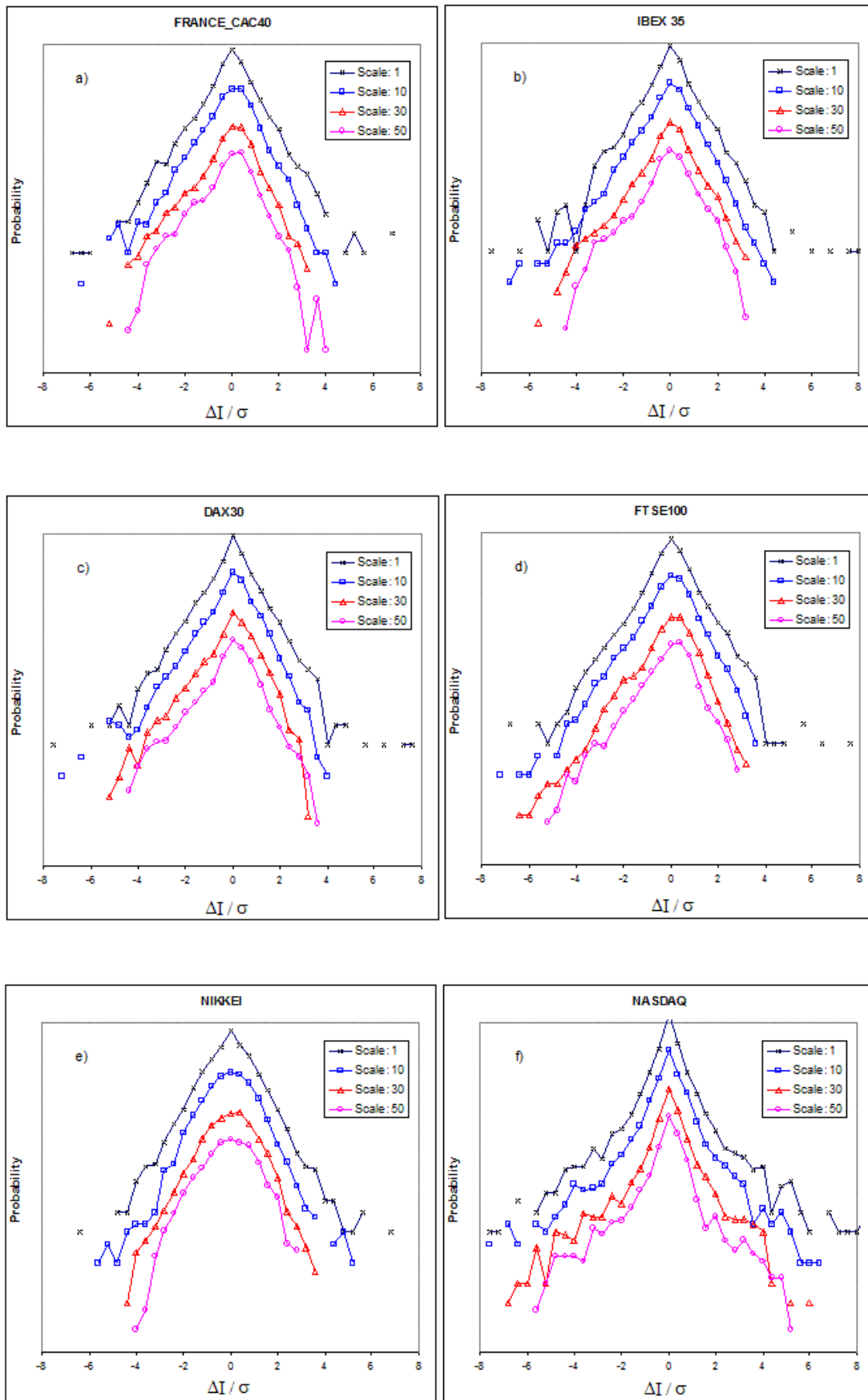


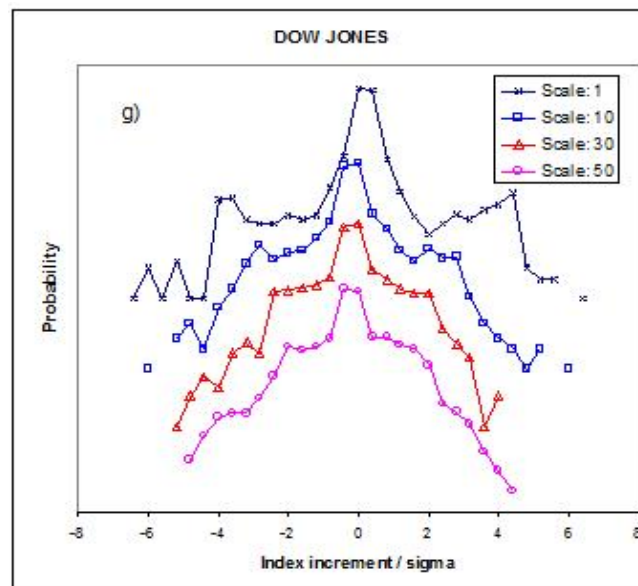


**Figura 5.1:** Evolución temporal de los distintos índices

El equivalente de la intermitencia de la turbulencia en economía es la variabilidad de la llamada volatilidad de los mercados financieros (Barndorff & Schmiegel 2008). A continuación, con objeto de estudiar esa posible variabilidad, en la Fig. 5.2 hemos representado, para diferentes incrementos de los índices,  $\Delta I$  (normalizados por sus desviaciones estándar), las PDFs (a escala logarítmica) correspondientes a varias escalas pequeñas, entre las que se incluye la más pequeña posible, es decir, un día (para hacer más clara la figura, las gráficas correspondientes a las diferentes escalas han sido desplazadas a lo largo del eje y). Se observa que cuando la escala disminuye, las colas de las PDFs se hacen más largas, es decir, las gráficas se vuelven más picudas, lo que se hace sobre todo patente al representar la escala menor (1 día).

## Intermitencia en otros ámbitos (mercados financieros)

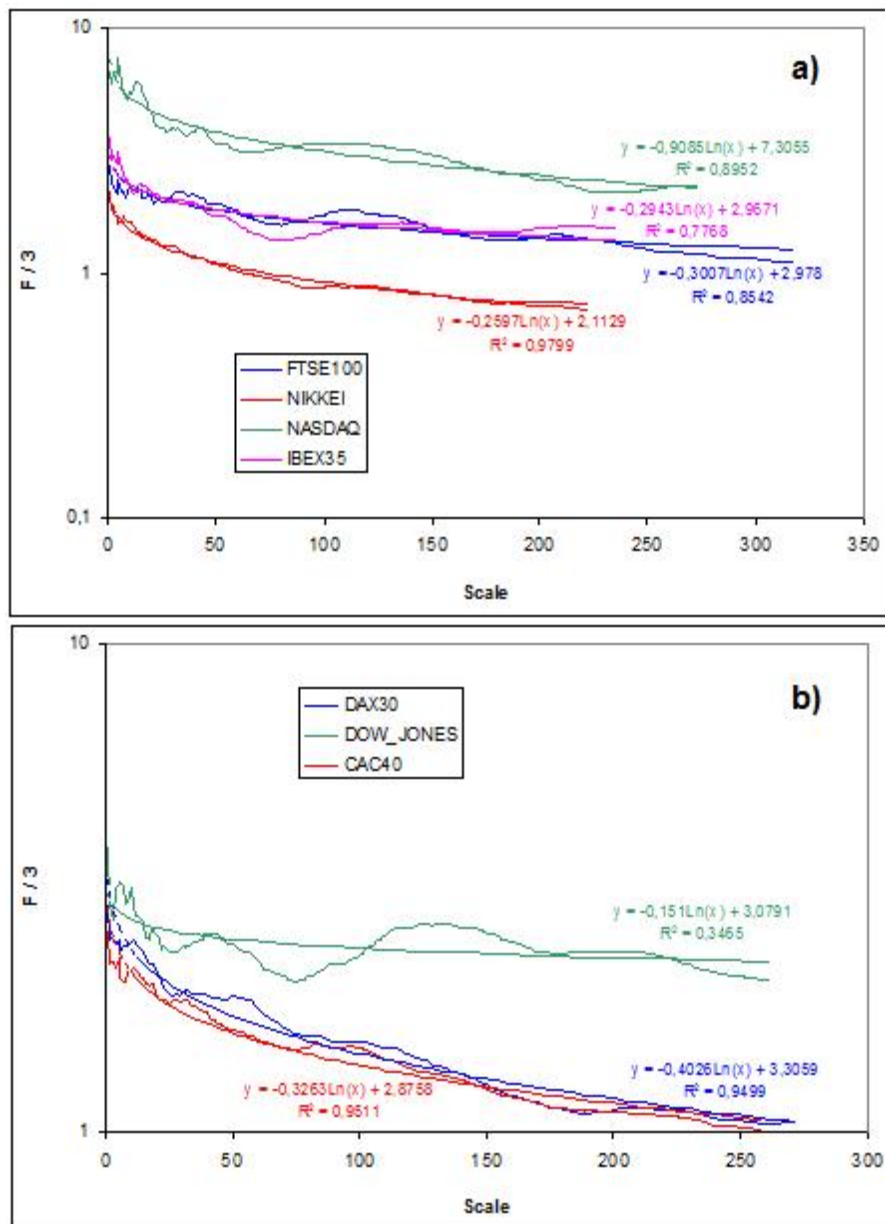




**Figura 5.2:** PDFs correspondientes a los distintos índices para varias escalas

En cualquier caso, la figura no resulta en ningún caso concluyente respecto al distinto grado de intermitencia mostrado por los diferentes índices.

Por ello, con objeto de cuantificar de alguna manera la forma de esas PDFs, podemos utilizar, como ya se ha explicado en apartados anteriores, la curtosis de las curvas. En ese sentido, en la Fig. 5.3 hemos representado  $F/3$ , desde la escala 1 hasta la escala integral correspondiente a cada índice, siendo  $F$  la curtosis. Además, en la figura se incluyen los ajustes realizados mediante curvas logarítmicas (que en todos los casos, salvo para el *DOW JONES*, presentan un elevado grado de bondad).

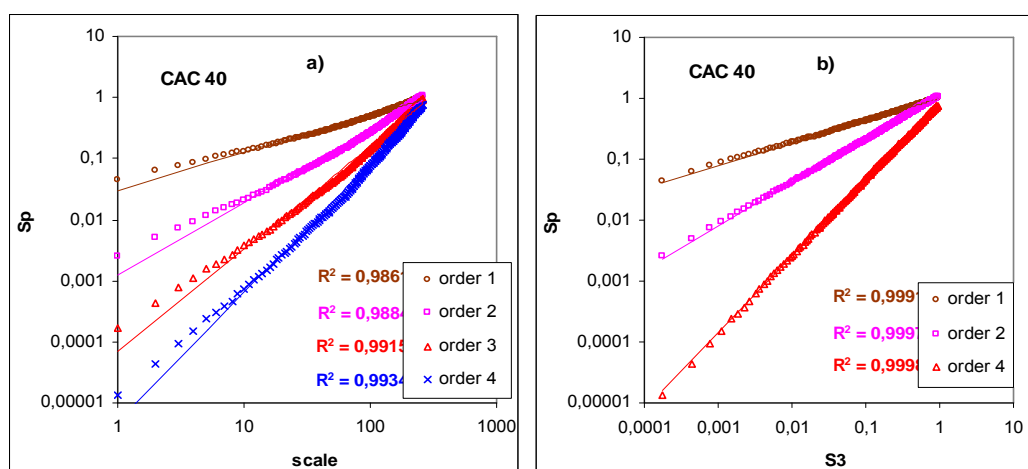


**Figura 5.3:** Evolución de la curtosis con la escala para los diferentes índices

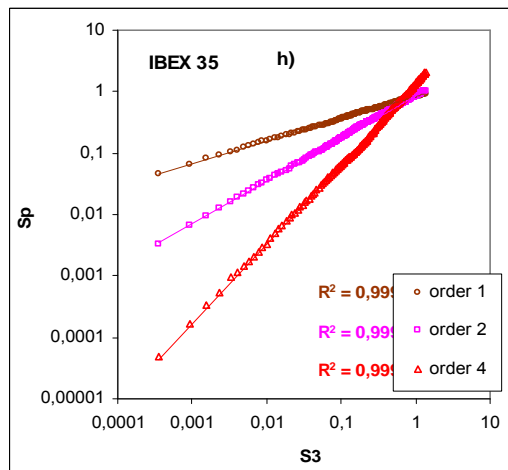
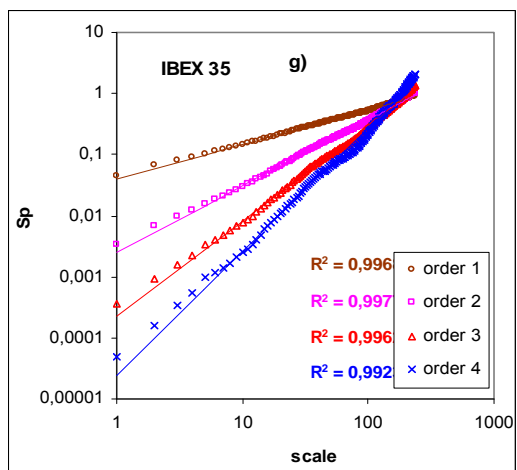
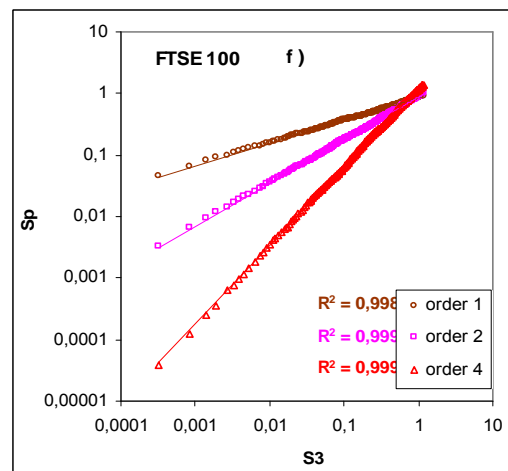
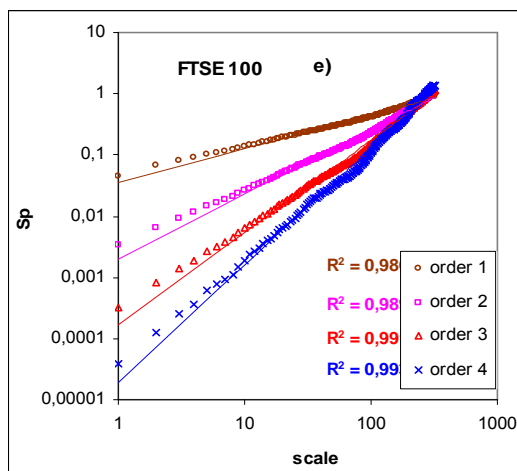
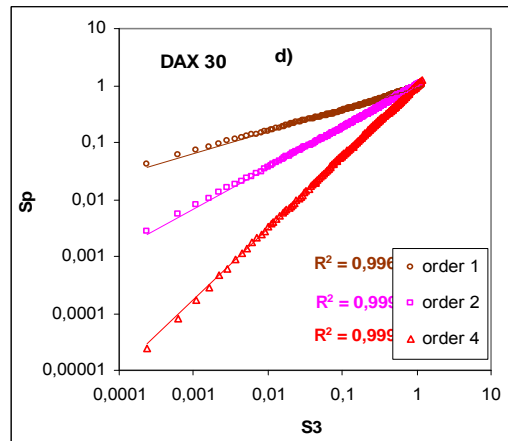
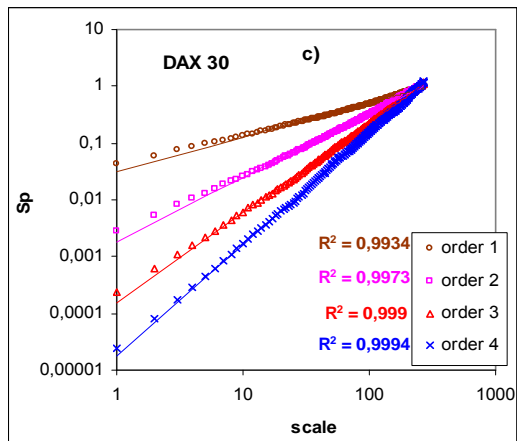
Se observa que el *NASDAQ* presenta un coeficiente para el término logarítmico de -0.9085, mucho mayor que el del resto de índices (situados entre -0.259 y -0.40). Por tanto, el *NASDAQ* es claramente el índice más intermitente, lo que significa que, a pequeña escala, la presencia de eventos raros es más probable y por tanto, que la variabilidad de la variación en el índice es mayor que en el resto. Este resultado también es justificable: las empresas tradicionales que integran los otros índices se sirven de un conocimiento más asentado que las dedicadas a la innovación tecnológica, que corren más riesgos, y por tanto, la tasa de transmisión de

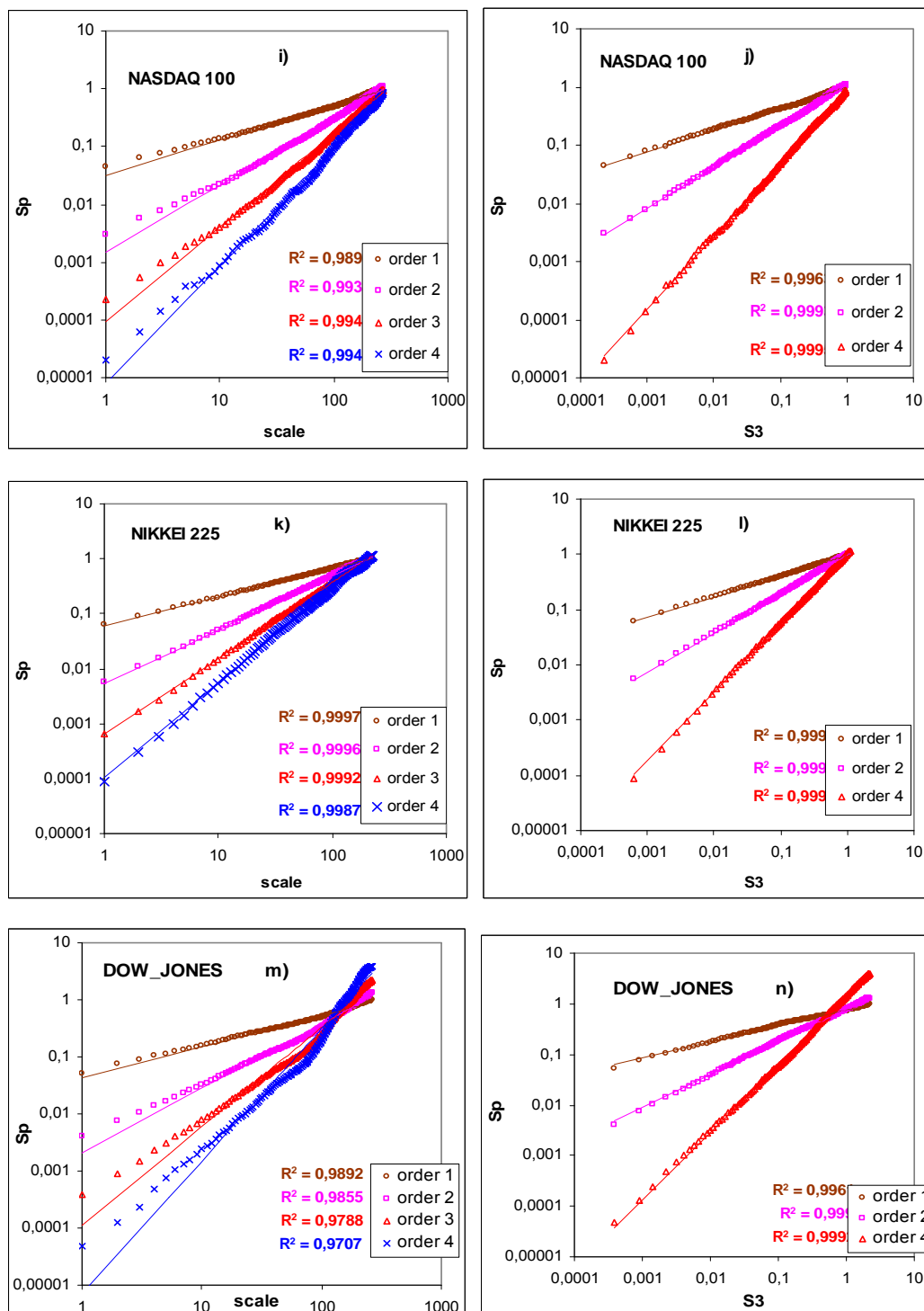
información en el corto plazo de las empresas tradicionales será mayor que en el caso de las tecnológicas. Además, el *NASDAQ* está compuesto por pequeñas y medianas empresas, más expuestas a los movimientos del mercado, frente a las grandes compañías que integran los otros índices. Por ello, la tasa de transmisión de información relativa a las grandes empresas será más importante en el corto plazo que en el caso de empresas más pequeñas. Por su parte, el *DOW JONES* es el índice que muestra el menor coeficiente para el término logarítmico, aunque como hemos indicado, el ajuste no resulta significativo, y por tanto no se puede utilizar para darnos una estimación cuantitativa del grado de intermitencia de este índice. En cualquier caso, a partir de la gráfica, sí se observa que la curtosis del *DOW JONES* presenta una variación menor cuando las escalas se hacen muy pequeñas.

Por tanto, la metodología anterior no resulta en absoluto concluyente a la hora de analizar la intermitencia correspondiente al *DOW JONES*. Por ello, resulta de interés emplear algún otro método que permita arrojar luz sobre el fenómeno de la intermitencia, especialmente para este índice. En ese sentido, a continuación realizaremos el estudio de intermitencia en base a los exponentes de escala. Para ello, en primer lugar, comprobaremos que, efectivamente, se verifica la ley de escala para los distintos índices. Con ese objeto, en la Fig. 5.4 hemos representado las funciones de estructura frente a la escala, desde la escala menor (1 día) hasta la correspondiente escala integral de cada índice. También hemos comprobado la verificación de la condición ESS.





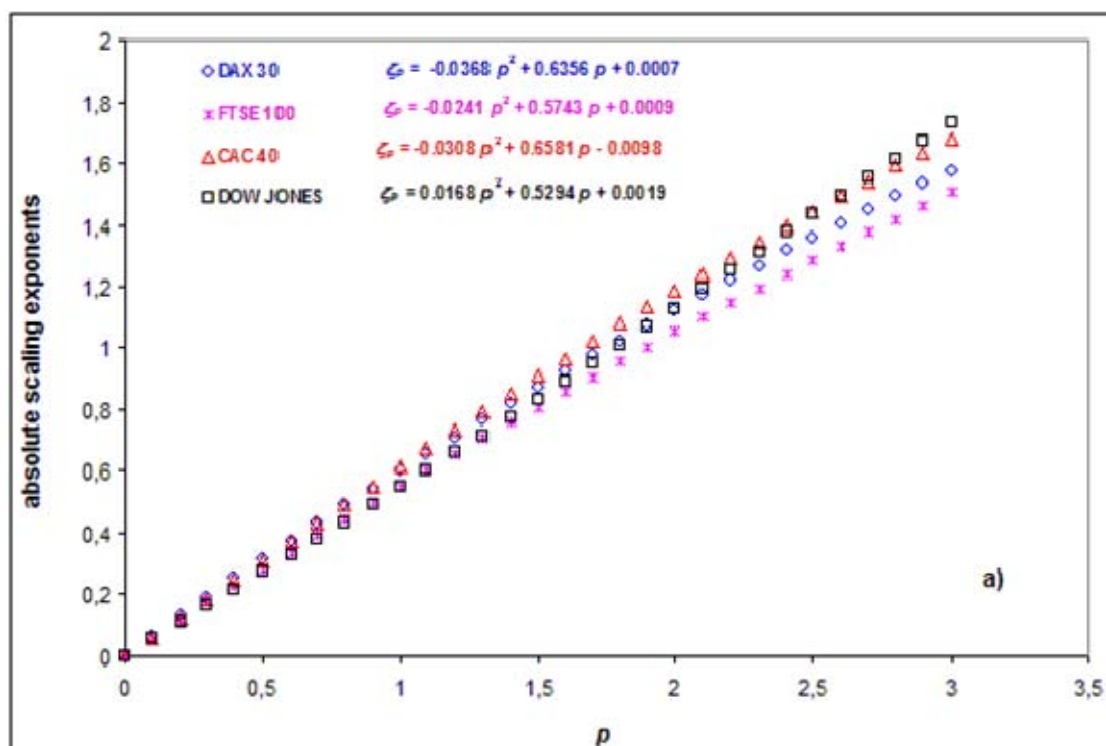


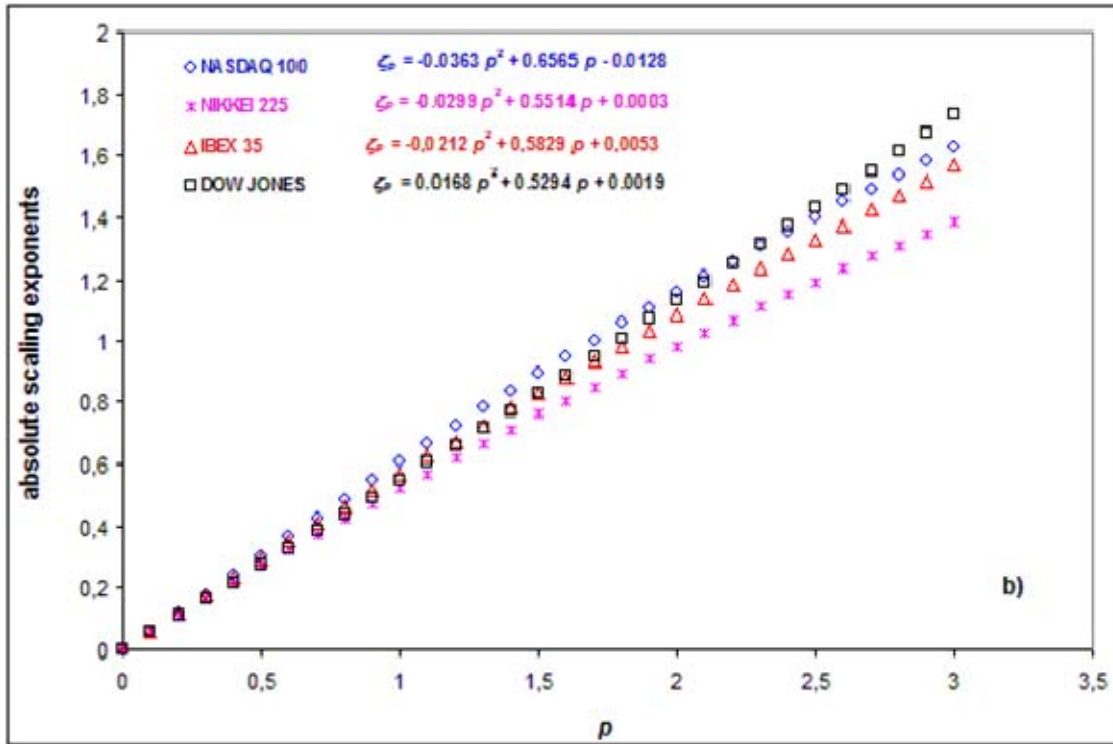


**Figura 5.4:** a), c), e), g), i), k) y m) Funciones de estructura vs. escala para los distintos índices de estudio. b) d), f), h), j), l) y n) Funciones de estructura vs. función de estructura de orden 3 para los distintos índices de estudio

Para los distintos índices analizados, la relación potencial se cumple con bastante precisión. Sólo el escalamiento es ligeramente más débil en el caso del *DOW JONES*

para el orden 4. En consecuencia, el grado de correlación existente con una relación potencial es suficientemente importante como para asumir el cumplimiento de ese escalamiento, y más aún, en el caso de la condición ESS. Una vez comprobado el escalamiento en los distintos índices, más evidente en el caso de la condición ESS, es posible analizar la intermitencia de la turbulencia utilizando el método de los exponentes de escala de las funciones de estructura. Para ello, hemos representado los exponentes de escala absolutos frente al orden de las funciones de estructura para los distintos índices (Fig. 5.5).





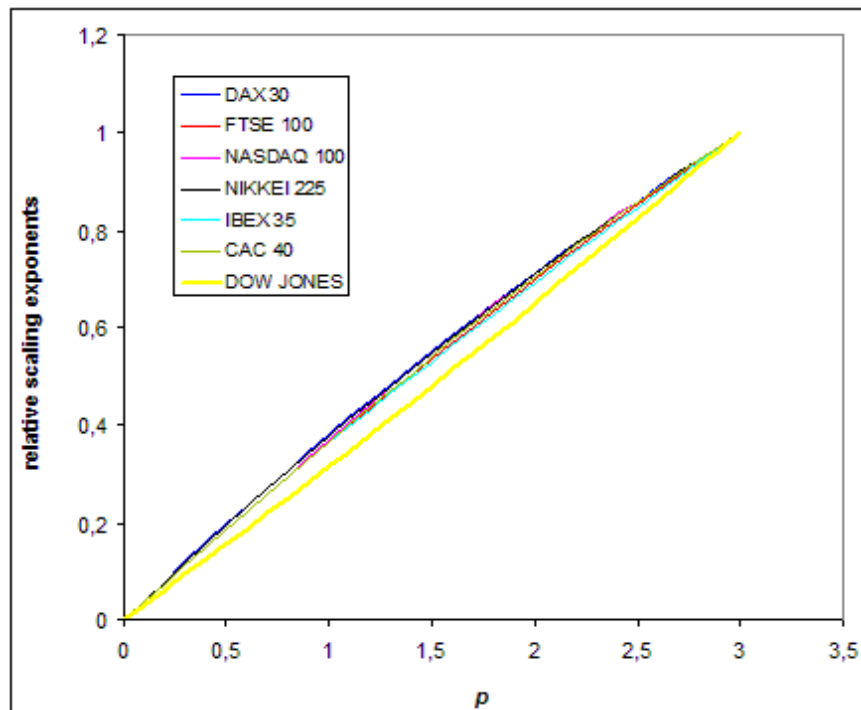
**Figura 5.5:** Exponentes de escala absolutos vs. orden de las funciones de estructura para los distintos índices de estudio a) *DAX 30*, *FTSE 100*, *CAC 40* y *DOWJONES*; b) *NASDAQ 100*, *NIKKEI 225*, *IBEX 35* y *DOWJONES* (La figura se ha desdoblado en 2 para una mejor visualización, incluyendo, al *DOWJONES* en ambas por su singularidad; se incluye la forma de la curva cuadrática de ajuste)

Todas las curvas anteriores, excepto la correspondiente al *DOW JONES*, presentan la habitual forma cóncava de la turbulencia totalmente desarrollada (en la figura se han incluido las curvas cuadráticas de ajuste, en las que se puede observar que los coeficientes del término cuadrático son negativos); el *DOW JONES* presenta una curvatura convexa, con un coeficiente cuadrático positivo. Es cierto que, a diferencia de la metodología previa, los exponentes de escala no muestran al *NASDAQ* claramente como el índice más intermitente, sino que de acuerdo con este método, *NASDAQ* y *DAX30* resultan igual de intermitentes, y no mucho más que algún otro como el *CAC40*. Estas divergencias se deben a la limitación mencionada a la hora de aplicar las metodologías de estimación de la intermitencia a los índices financieros en base a la cascada turbulenta. Por ello, los resultados, como indicábamos anteriormente, siempre deben ser respaldados por la correspondiente interpretación física. Dada la limitación expuesta, resulta procedente llevar a cabo un análisis complementario sobre intermitencia, sirviéndonos para ello de los exponentes de escala relativos. Recordemos que estos exponentes presentan un escalamiento mucho

## Intermitencia en otros ámbitos (mercados financieros)

más preciso que el de los absolutos (sobre todo en ausencia de homogeneidad), aunque el significado de su medida es más discutible, aparte de proporcionar resultados más uniformes, lo que hace que en ocasiones resulte menos evidente el grado de intermitencia alcanzado.

En la Fig. 5.6 hemos representado los exponentes de escala relativos para los distintos índices. En esa figura se observa que todas las curvas prácticamente se confunden en una sola (la mencionada uniformización), pero la correspondiente al *DOW JONES* presenta una forma claramente distinta.



**Figura 5.6:** Exponentes de escala relativos vs. orden de las funciones de estructura para los distintos índices de estudio

Con la cautela anteriormente expuesta con que se deben tomar estos resultados, debido a la posible falta de estacionariedad de las series de datos financieros con las que trabajamos, la figura anterior resulta de especial interés, habida cuenta del resultado obtenido en el caso de la capa límite atmosférica. En efecto, recordemos que en la atmósfera, en situaciones de fuerte estabilidad, obteníamos curvas  $\zeta_p$  vs.  $p$  de tipo convexo. La explicación que dábamos para ese tipo de curvatura era que, en

situaciones de fuerte estabilidad, en las que los movimientos verticales se veían inhibidos, ondas de alta frecuencia podían quedar atrapadas; la ruptura de esas ondas podía dar lugar a la aparición de “reventones” de turbulencia, que dificultarían el total desarrollo de la turbulencia, pero que aportarían cantidades adicionales de energía en escalas pequeñas, lo que causaría una redistribución de la energía a lo largo del rango de escalamiento. Debido a esa redistribución, la tasa de disipación de energía podía disminuir al descender por la escala en lugar de incrementarse, como ocurre cuando la turbulencia se ha podido desarrollar totalmente.

Análogamente, en los índices financieros la turbulencia puede, o no, desarrollarse totalmente. En efecto, todos los índices analizados, con excepción del *DOW JONES* y el *NIKKEI*, se elaboran utilizando para su ponderación dos parámetros: los precios y las cantidades de las correspondientes acciones. En economía, los “reventones” informativos, de muy escasa duración, afectan en el corto plazo únicamente a los precios, y no a las cantidades, que resultan más estables. Por ello, la tasa de transmisión de esa información resulta más significativa en los índices que tan sólo se sirven de los precios para su elaboración que en los que se sirven de los precios y cantidades. En consecuencia, es posible que la tasa de transmisión a corto plazo pueda llegar a superar a la tasa a largo plazo, lo que se traduciría en curvas  $\zeta_p$  vs.  $p$  convexas (lo que como ya hemos indicado a lo largo de la tesis, no es matemáticamente posible, en situaciones de turbulencia totalmente desarrollada). Sin embargo, al igual que en el caso de los reventones energéticos que se producen en la CLA en situaciones de fuerte estabilidad de estratificación, los reventones informativos dificultan el total desarrollo de la intermitencia, posibilitando la existencia de tales curvas convexas (como se observa en el caso del *DOW JONES*).

Hay que destacar que los reventones informativos también afectan al *NIKKEI* del mismo modo que al *DOW JONES*, pues ambos índices se construyen a partir únicamente de los precios. Sin embargo, como ya hemos indicado con anterioridad, el tipo de empresas también juega un papel fundamental en la intermitencia. En efecto, el *NIKKEI*, constituido por empresas cuyo sostén principal son las tecnológicas, a diferencia de lo que ocurre con las empresas del *DOW JONES*, ve limitado su menor grado de intermitencia por efecto de ese factor, lo que hace que en el *NIKKEI* no se lleguen a observar curvas convexas.

### 5.3. Racionalidad de los datos financieros vs. comportamiento en la atmósfera

Hemos visto la analogía que se puede establecer a la hora de analizar la intermitencia de la turbulencia presente en los mercados financieros y en los datos atmosféricos, y cómo los resultados obtenidos en ambos campos pueden ser interpretados de manera similar. Pero además, sirviéndonos nuevamente de la interpretación como una cascada de remolinos (o de vórtices, en una visión tridimensional) es posible poner de manifiesto la racionalidad que debe estar presente, de alguna manera, en los datos financieros. En efecto, si cada vórtice representa un individuo, la cascada de vórtices representa la transmisión de información de un individuo a otro, y la pérdida de información una posible falta de comunicación entre individuos. Un alargamiento de los vórtices implicaría que la mente humana se comporta de un modo elástico, absorbiendo más y más información (si bien es cierto que esa acumulación de información no puede mantenerse eternamente, pues la mente posee una “racionalidad limitada”; es decir, llega un momento en que el cerebro se satura). Dado que el alargamiento de los vórtices es una característica propia de la turbulencia 3D, la conducta turbulenta de los mercados financieros debería corresponderse, por tanto, con ese tipo de turbulencia. Con objeto de analizar ese grado de correspondencia, vamos a caracterizar el comportamiento de los mercados mediante un modelo GOY (Sección 3.3.1.6), pues es un modelo que permite visualizar con bastante claridad el grado de tridimensionalidad existente. En ese sentido, podemos servirnos de expresiones análogas a las correspondientes a 3.67, en las que mostramos la relación entre los exponentes de escala relativos y el parámetro  $\delta$  (en este caso, hemos tomado las expresiones correspondientes a  $q=2$ ).

$$\begin{aligned}\bar{\zeta}_1 &= 0.9586 \delta^4 - 2.8408 \delta^3 + 3.2006 \delta^2 - 1.7048 \delta + 0.7298 \\ \bar{\zeta}_2 &= 0.56 \delta^4 - 1.6593 \delta^3 + 1.8686 \delta^2 - 0.9935 \delta + 0.8968\end{aligned}\tag{5.1}$$

Sustituyendo en 5.1 el valor de los exponentes relativos correspondientes a cada situación de estudio, es posible deducir el valor  $\delta$  que caracterizaría a dicha situación. De este modo obtenemos la Tabla 5.1.

### Intermitencia en otros ámbitos (mercados financieros)

Orden	DAX	NASDAQ	CAC	FTSE	NIKKEI	IBEX35	DOWJONES
1	0.4258	0.486	0.548	0.542	0.449	0.57	*
2	0.2983	0.303	0.335	0.377	0.3112	0.438	*

**Tabla 5.1:** Valores del parámetro  $\delta$  correspondientes a diferentes índices de mercado (para los 2 primeros órdenes de las funciones de estructura).\* El modelo GOY no puede representar los exponentes relativos correspondientes al *DOWJONES*

Como se puede observar en la tabla, los mayores valores se obtienen para el *IBEX35*, aunque, en cualquier caso, incluso para el orden 1 (para el cual,  $\delta$  alcanza los mayores valores)  $\delta$  se encuentra muy lejos del valor crítico que separa la turbulencia 3D de la 2D (recordemos que ese valor crítico era 1, y  $\delta < 1$  implica turbulencia 3D). Estos resultados muestran que el alargamiento de los vórtices, fruto de la “racionalidad limitada”, es un hecho en los mercados financieros. Sin embargo, también observamos que el modelo no es capaz de representar los valores correspondientes al *DOWJONES*; esta limitación ya la mostrábamos al analizar los exponentes relativos de las situaciones atmosféricas más estables mediante el modelo GOY. En realidad, el hecho de que no podamos modelizar este índice, al no haberse desarrollado totalmente la turbulencia, indica que presenta una conducta similar a la de las situaciones más estables (en las que se pueden desarrollar los “reventones” de turbulencia) y, por tanto, más próxima a la turbulencia 2D. Es decir, en el caso del *DOWJONES*, la racionalidad presente en los otros índices tiene mucho menos peso: la tasa de información transmitida a un individuo (vórtice) es menos importante, pues sólo se refiere a los precios (no a las cantidades); pero además, a esto hay que sumar que en el caso del *DOWJONES* se trata de información ya conocida (empresas asentadas dedicadas a actividades poco innovadoras), a diferencia del *NIKKEI*, en donde la información, aunque sólo referida a precios, hace mención a empresas tecnológicas en las que la innovación y, por tanto, el nuevo conocimiento, es mucho más importante.

A diferencia de lo que ocurre en los índices financieros (salvo el *DOWJONES*), en el caso de datos atmosféricos la turbulencia presenta un carácter más o menos tridimensional dependiendo de las condiciones atmosféricas (no siempre es tan claramente tridimensional). Como ejemplo, en la Tabla 5.2 se muestran los valores del parámetro  $\delta$  (obtenidos también a partir de las expresiones 5.1) correspondientes



### Intermitencia en otros ámbitos (mercados financieros)

---

a tres situaciones atmosféricas ocurridas durante la campaña. En situaciones de mayor inestabilidad de estratificación (habitualmente diurnas), se observa que el valor del parámetro  $\delta$  es mucho menor (y, en consecuencia, el comportamiento turbulento es más tridimensional) que en situaciones nocturnas, característicamente más estables.

Orden	16_16:00	16_07:00	16_00:30
1	0.453	0.73	1.3
2	0.321	0.557	1.05

**Tabla 5.2:** Valores del parámetro  $\delta$  para los 2 primeros órdenes de las funciones de estructura correspondientes a tres situaciones atmosféricas diferentes (día 16 de septiembre a las 16:00, 07:00 y a las 00:30 GMT)

## **6. Resumen y conclusiones**

En términos generales, podemos decir que la intermitencia de la turbulencia es el fenómeno consistente en la variabilidad existente a lo largo de la cascada turbulenta. Esa variabilidad se puede concretar en el cambio en el comportamiento que experimentan algunas variables a lo largo de esa cascada. En ese sentido, la variación en la velocidad que presentan los remolinos correspondientes a cada paso de la cascada es un excelente indicador de esa intermitencia. Dada la naturaleza de los remolinos, el análisis de ese indicador debe ser llevado a cabo desde un punto de vista estadístico, es decir, será necesario analizar la evolución en el comportamiento de la distribución de probabilidad representativa de la variable velocidad. Dado que esa distribución puede venir caracterizada por distintos elementos, existen diversos criterios que pueden utilizarse para llevar a cabo el análisis.

Uno de esos elementos son las funciones de densidad. Por tanto, una primera forma de estimar la evolución con la escala de las distribuciones de probabilidad sería analizando la evolución de esas funciones de densidad. A ese respecto existen diversos procedimientos de llevar a cabo ese análisis. El primero, y más evidente, es a partir del análisis visual de la forma de las funciones de densidad. En la tesis se ha empleado, para algunos casos, este procedimiento, mostrando en ocasiones resultados muy claros.

Sin embargo, es posible cuantificar la forma que presentan esas funciones de densidad, a través de las llamadas medidas de forma estadísticas. Una de esas medidas es la curtosis, que da idea del grado de concentración de los valores de la variable en torno a la media, es decir, indica lo puntiaguda que resulta la función de densidad y, en consecuencia, la forma de esa función. En realidad, el parámetro de medida que se utiliza es una medida comparativa con la curtosis de la distribución Gaussiana, cuyo valor es 3. En la tesis también se ha mostrado este procedimiento para valorar la evolución de las funciones de densidad con la escala (Vindel *et al.* 2008a).

Cuando existe escalamiento, otra alternativa para analizar la intermitencia es a partir de los llamados exponentes de escala,  $\zeta_p$ , esto es, los exponentes que presentan las escalas en su relación de tipo potencial con las funciones de estructura. Ese

escalamiento está presente en el rango inercial, al menos en situaciones de homogeneidad. En este caso, la forma de estimar la intermitencia es a partir de la curva  $\zeta_p$ , vs.  $p$ . En efecto, el grado de alejamiento de esa curva respecto de la forma lineal es una medida del grado de intermitencia. En realidad este procedimiento tiene su justificación en el significado de las funciones de estructura, pues representan los momentos estadísticos (en valor absoluto), y esos momentos son medidas que permiten, al igual, que las funciones de densidad, caracterizar las distribuciones de probabilidad.

Cuando además de existir escalamiento, se puede suponer flujo incompresible para números de Reynolds grandes, las curvas  $\zeta_{2p}$  vs.  $p$  deben ser cóncavas. La aproximación de flujo incompresible requiere de un régimen de turbulencia totalmente desarrollada. En ese caso, la curva  $\zeta_p$ , vs.  $p$  puede ajustarse con bastante precisión por una función cuadrática que pasa aproximadamente por el origen y, por tanto, el coeficiente del término cuadrático puede emplearse, al menos en primera aproximación, como medida del grado de intermitencia existente (cuanto más negativo es dicho coeficiente, mayor será la curvatura y, por tanto, la desviación respecto de la forma lineal y la intermitencia). A diferencia del análisis visual, o del análisis a partir de la evolución con la escala por parte de la curtosis, en los que es necesaria la representación (de la función de densidad, o de la curtosis) para cada una de las escalas a lo largo de la cascada, en este procedimiento se representa el grado de intermitencia con un único valor (el del coeficiente del término cuadrático). En la tesis se han mostrado las curvas  $\zeta_p$ , vs.  $p$  (Vindel & Yagüe 2011), para varios casos de estudio, así como el valor del coeficiente del término cuadrático estimado.

En relación con el procedimiento anterior, también se dispone de la metodología basada en la llamada condición *Extended Self Similarity* (ESS), condición ésta válida tanto para turbulencia homogénea como no homogénea. En este caso, la relación potencial a la que nos referíamos anteriormente se produce entre las funciones de estructura y la función de estructura de orden 3. La condición ESS no representa directamente la evolución de las funciones de estructura con la escala, por lo que su valoración de la intermitencia es objeto de controversia, aparte de que los exponentes de escala obtenidos a partir de esta condición (que para diferenciarlos de los

obtenidos en la relación potencial con la escala – denominados exponentes de escala absolutos - se denominan exponentes de escala relativos), resultan más uniformes para las distintas situaciones de estudio. Sin embargo, el cumplimiento de la relación potencial es más evidente que en el caso de los exponentes absolutos.

Una vez conocidos los métodos para estimar la intermitencia, resulta necesario explicar el significado físico de este fenómeno. Cuando no existe intermitencia, la tasa de disipación de energía en las distintas escalas se mantiene constante (no existe variabilidad); sin embargo, en condiciones de turbulencia totalmente desarrollada, la intermitencia conlleva que esa tasa se vuelva variable, de tal forma que la misma aumenta al acercarse a las escalas menores, es decir, al acercarse al rango disipativo.

Existen numerosos modelos que tratan de reflejar el grado de intermitencia existente en una determinada situación turbulenta (modelo de Kolmogorov, log-normal, de She-Lévêque, binomial...), alguno de ellos que se emplea incluso para el caso de la turbulencia no homogénea (como el modelo log-Poisson que incluye la propiedad ESS); sin embargo, todos esos modelos son válidos, únicamente, para el caso de la turbulencia totalmente desarrollada. En la tesis también hemos visto la forma de estimar el parámetro o parámetros característicos de un determinado modelo de intermitencia (Vindel *et al.* 2008b), y de ese modo, comparando ese (esos) parámetro(s), conocer qué situación analizada presenta un mayor o menor grado de intermitencia. En ese sentido, no sólo hemos mostrado la formulación teórica de algunos de los modelos más importantes conocidos, sino que también hemos desarrollado un criterio para la aplicación del, posiblemente, más importante del grupo de los modelos *shell*, el GOY, haciendo uso, para ello, de los exponentes de escala relativos (Vindel & Yagüe 2009).

Sin embargo, como decimos, todos los modelos de intermitencia conocidos quedan restringidos a la turbulencia totalmente desarrollada, por lo que su aplicación al mundo físico, no reproducido en un laboratorio, no resulta siempre posible, y ello limita, de manera fundamental, el análisis de la intermitencia de la turbulencia, mediante estos modelos, en la atmósfera. En efecto, en numerosas situaciones atmosféricas, asociadas al tipo de estratificación existente, la turbulencia no se

## Resumen y conclusiones

---

encuentra totalmente desarrollada, por lo que en esas situaciones los resultados obtenidos han resultado novedosos.

Para nuestro análisis de la intermitencia de la turbulencia atendiendo a la situación atmosférica, hemos utilizado datos de la campaña SABLES98 llevada a cabo en septiembre del año 1998 en las instalaciones del CIBA en la provincia de Valladolid.

Se ha realizado un estudio de la intermitencia utilizando los datos de un anemómetro sónico situado a 32 m de altura, que nos ha proporcionado los datos de velocidad necesarios (20 Hz) para poder estimar la variación de esta variable de acuerdo con la escala considerada. Para ese estudio hemos utilizado algunas de las técnicas anteriormente mencionadas; por ejemplo, en el análisis visual de las funciones de densidad correspondientes a las distintas escalas se observa que, en algunos casos, esas funciones se vuelven más picudas (alargan sus colas) a medida que disminuye la escala considerada, es decir, a medida que se desciende por la cascada. Estos casos se corresponden, en general, con situaciones diurnas. Sin embargo, en situaciones nocturnas se observa que la evolución prácticamente no existe o, incluso, en casos extremos, las funciones de densidad reducen sus colas, es decir, se vuelven más cerradas. La mayor probabilidad observada para incrementos de velocidad iguales a cero en el caso de las situaciones diurnas es indicativa de la mayor persistencia que se observa en estas situaciones. Esa mayor persistencia se ve ratificada por mayores valores del exponente de Hurst correspondiente a los casos diurnos.

Haciendo uso de la evolución de la curtosis los resultados son análogos a los anteriores, pues en definitiva y como ya hemos explicado, la curtosis simplemente cuantifica la forma de las funciones de densidad. En efecto, en la mayoría de casos la curtosis aumenta al disminuir la escala; en otros prácticamente no se observa evolución y, en unos pocos casos, la curtosis incluso disminuye su valor para las escalas más pequeñas. Llegados a este punto hay que destacar que estos cambios que estamos evaluando se hacen más patentes en las escalas menores, es decir, para escalas grandes apenas son apreciables, por lo que la intermitencia es un fenómeno que tiene lugar fundamentalmente en las escalas más pequeñas, cerca del rango disipativo (Vindel *et al.* 2008a).

## Resumen y conclusiones

---

Como hemos indicado, la menor persistencia propia de las situaciones nocturnas se ha visto ratificada mediante el cálculo del exponente  $H(1)$ , es decir, de  $\zeta_1$ . Esa menor persistencia se traduce en una menor codimensión, pero ello no determina de manera inequívoca el grado de posible disminución en la intermitencia, es decir, el posible grado de acercamiento a una forma lineal. Para valorar ese grado de intermitencia es necesario conocer la forma de los distintos exponentes de escala en su conjunto. En ese sentido, hemos estimado el grado de intermitencia a partir del coeficiente del término cuadrático de la función cuadrática de ajuste (parámetro de intermitencia  $\beta$ ) a la representación de los exponentes de escala (absolutos y relativos) frente al orden de las funciones de estructura. Para poderlo utilizar, previamente hemos comprobado que en todas las situaciones de estudio se observaba una relación potencial entre las funciones de estructura y las escalas, aunque en la mayor parte de esas situaciones la turbulencia fuera no homogénea (además de entre esas funciones y la de orden 3). Hecha esa comprobación, se observa que, en la mayoría de casos de estudio correspondientes a situaciones neutras o con inestabilidad de estratificación, el coeficiente  $\beta$  es negativo (tanto más cuanto más cóncava es la curva  $\zeta_p$ , vs.  $p$ ), en otros casos apenas se aprecia curvatura y, en otros pocos (situaciones con fuerte estabilidad de estratificación), ese coeficiente es positivo (Vindel & Yagüe 2011). En cualquier caso, se observa que los resultados obtenidos utilizando uno u otro tipo de exponentes (absolutos o relativos) es muy similar.

Con objeto de tratar de justificar el comportamiento anterior, hemos analizado la situación atmosférica de estratificación térmica correspondiente a cada una de los casos de estudio, observando una clara correlación entre el tipo de estratificación (caracterizado a través de la diferencia de temperaturas entre los niveles de 50 y 0.22m.) y el comportamiento mostrado respecto a la intermitencia. Los casos en que las funciones de densidad alargan sus colas al disminuir la escala y, por tanto, aumentan también sus curtosis en las escalas menores, son los mismos casos en que el coeficiente  $\beta$  es negativo; esos casos se corresponden con situaciones de inestabilidad atmosférica (tanto más intermitencia se obtiene cuanto mayor es esa inestabilidad). Situaciones más neutras se corresponden con una intermitencia prácticamente inexistente y, finalmente, en situaciones de alta estabilidad de estratificación correspondientes con fuertes inversiones térmicas superficiales, las

## Resumen y conclusiones

---

funciones de densidad se cierran para escalas muy pequeñas, y las curvas  $\zeta_p$ , vs.  $p$  adoptan una forma ligeramente convexa ( $\beta > 0$ ). Hemos de indicar que la conocida evolución a lo largo del día por parte de la estratificación (aumento de la inestabilidad durante las horas diurnas y reducción de la misma por la noche) queda perfectamente patente en las distintas representaciones llevadas a cabo en el texto (Vindel & Yagüe 2011).

Como hemos indicado, si la turbulencia está totalmente desarrollada no es posible la curvatura convexa en las curvas  $\zeta_p$ , vs.  $p$ . Sin embargo, en situaciones de fuerte estabilidad, la posibilidad de que tengan lugar “reventones” de turbulencia como consecuencia de la ruptura de ondas atrapadas por la estabilidad, inhibe, precisamente, ese desarrollo de la turbulencia. Por ello, el hecho de haber observado ese tipo de curvatura en situaciones de fuerte estabilidad queda plenamente justificado. Ese tipo de comportamiento, al igual que el mostrado por las funciones de densidad, es opuesto al observado en las situaciones de inestabilidad. Desde el punto de vista físico, ya hemos mencionado que la intermitencia en turbulencia totalmente desarrollada conlleva un aumento de la tasa de disipación de energía en las escalas menores; sin embargo, el comportamiento observado en situaciones de fuerte estabilidad se debe traducir en una disminución de la tasa de disipación en las escalas más pequeñas.

El fenómeno contemplado en situaciones muy estables, disminuyendo la tasa de disipación al acercarse al rango disipativo, resulta, a priori, sorprendente. Sin embargo, la tesis ofrece una posible explicación (Vindel & Yagüe 2011) a este hecho. En efecto, de acuerdo con los espectros energéticos, la mayor parte de la energía se encuentra contenida en los remolinos de mayor tamaño, de forma que, en el caso de turbulencia totalmente desarrollada, la tasa de disipación de energía aumenta al descender por la cascada. Sin embargo, en situaciones de fuerte estabilidad, los movimientos restringidos en una dimensión pueden impedir el desarrollo total de la turbulencia, de tal forma que pueden existir movimientos submesoescalares y ondas que en ocasiones se solapan con los propios movimientos turbulentos; algunas de esas ondas, con alta frecuencia, pueden quedar atrapadas hasta que, en un momento dado, rompen dando lugar a “reventones” de turbulencia.



## Resumen y conclusiones

---

Estos "reventones" proporcionan una cantidad adicional de energía en escalas pequeñas que permiten una mayor uniformidad energética a lo largo de toda la cascada; con ello, el aumento por parte de la tasa de energía disipada al disminuir la escala puede ser menor e, incluso en situaciones más extremas, dicha tasa puede llegar a disminuir (en lugar de aumentar) al descender por la cascada.

La presencia de estos "reventones" de turbulencia puede corresponderse con los picos mostrados por los espectros energéticos de las situaciones más estables. En efecto, las situaciones inestables presentan espectros con una pendiente más o menos constante a lo largo de toda la cascada y próxima a  $-5/3$ . Sin embargo, en las situaciones de mayor estabilidad se aprecia una disminución de la pendiente a partir de un cierto rango de escalas.

Adicionalmente, hemos analizado la relación entre el coeficiente de intermitencia  $\beta$  y la velocidad del viento, y hemos observado la existencia, dentro del intervalo de tiempo estudiado, de dos periodos en los que la variable viento muestra un comportamiento diferente. En el primero de esos periodos, el viento aumenta durante el día y disminuye por la noche, con diferencias considerables entre ambos momentos; en este periodo el aumento de la intermitencia al aumentar el viento resulta evidente. Sin embargo, existe un segundo periodo caracterizado por noches con viento moderado y días de viento ligero y, además, con diferencias menores entre día y noche. Estas situaciones nocturnas con viento moderado podrían explicarse por la presencia de flujos catabáticos (asociados al desarrollo de chorros de nivel bajo, *LLJs*) junto con la presencia de los anteriormente mencionados "reventones" de turbulencia. En estas noches, la intermitencia presenta un comportamiento opuesto al observado en el otro periodo, observándose una disminución de este fenómeno al aumentar la velocidad. Esto se puede justificar para el segundo periodo por la turbulencia esporádica presente en la mayoría de noches estables de este periodo, en las que el viento no se relaciona con las condiciones sinópticas, sino con los diferentes procesos a mesoescala o, incluso a submesoescala (vientos catabáticos, ondas de gravedad a diferentes escalas, chorros de capa baja o *LLJs*, etc.) que afectan a la intermitencia de un modo diferente.

## Resumen y conclusiones

---

En el trabajo también se ha analizado la posibilidad de caracterizar las distintas situaciones turbulentas estudiadas mediante distribuciones de probabilidad de Lévy (caracterizadas mediante el parámetro de estabilidad  $\alpha$ ). Los resultados obtenidos muestran que este tipo de distribuciones sólo sirven para representar los rangos escalares menores, en los que se desarrolla, fundamentalmente, el fenómeno de la intermitencia, fenómeno que produce las características colas alargadas propias de las distribuciones de Lévy. En relación con esta circunstancia, también hemos observado que las situaciones más inestables y, por tanto, más intermitentes, son precisamente las que pueden ser representadas por este tipo de distribuciones. Sin embargo, cuando la estabilidad aumenta, ni siquiera la reducción del rango de escala permite la aplicación de las distribuciones de Lévy.

Finalmente, con objeto de analizar el comportamiento de la intermitencia en otros ámbitos distintos al atmosférico, hemos dedicado un capítulo al estudio de la intermitencia en un dominio sobre el que existe una amplia literatura sobre el comportamiento turbulento: el de los mercados financieros, pues las similitudes entre ambos campos de estudio son importantes (Vindel & Trincado 2010). Para ello, hemos analizado algunos de los índices bursátiles más importantes del mundo (*NASDAQ100*, *DOW JONES*, *IBEX35*, *CAC40*, *FTSE100*, *NIKKEI225* y *DAX30*), y los resultados obtenidos resultan de un enorme interés. Sin olvidar la limitación que supone trabajar con series de datos menos estacionarias que las correspondientes a las velocidades, lo que hace que estos resultados deben ser considerados con cierta cautela, la conducta intermitente de la turbulencia queda de manifiesto en todos los índices (analizando las correspondientes curvas  $\zeta_p$ , vs.  $p$ ). Todas esas curvas, salvo la correspondiente a un caso, presentan la curvatura cóncava característica de la turbulencia totalmente desarrollada. El índice discordante es el *DOW JONES*; además, esa discordancia se hace incluso más patente al representar las gráficas de los exponentes de escala relativos, pues todas ellas prácticamente se confunden en una sola, quedando claramente con una forma distinta la correspondiente al *DOW JONES*. La intermitencia de los mercados financieros se ve afectada por el modo de construcción del índice, es decir, por el tipo de empresas que lo constituyen y por el tipo de ponderación utilizado en la elaboración del mismo. Respecto al tipo de empresas, las pequeñas y medianas empresas tecnológicas (como son las que constituyen el índice *NASDAQ*) generan índices más volátiles (más intermitentes) por

su propia naturaleza. En efecto, la información relevante tecnológica, a diferencia del conocimiento tradicional y asentado, es más difícil de asimilar en el corto plazo, y por tanto, la tasa de transmisión de la información en ese corto plazo es menor que en el largo (mayor intermitencia). Y lo mismo se puede argumentar respecto al tamaño de las empresas: la información vertida por las empresas grandes y consolidadas se asimila en el corto plazo. Respecto al tipo de ponderación utilizado, sirviéndose o bien sólo de precios (como el *DOW JONES* o el *NIKKEI*), o bien de precios y cantidades, el primer sistema reduce la intermitencia respecto al segundo: los “reventones” informativos, de muy escasa duración, afectan en el corto plazo únicamente a los precios, y no a las cantidades, de tal modo que, en ese corto plazo, la tasa de transmisión de esa información es más importante en los índices que sólo tienen en cuenta los precios y, por tanto, esos índices resultan menos volátiles. Además, esos “reventones”, al igual que ocurre en la atmósfera en situaciones de fuerte estabilidad, dificultan el desarrollo de la intermitencia en el sentido habitual, haciendo posible situaciones en las que la tasa de disipación de la información disminuya al disminuir la escala, mostrando una curva  $\zeta_p$  vs.  $p$  convexa (como en el caso del *DOW JONES*).

Para finalizar el capítulo dedicado a la analogía entre los mercados financieros y el movimiento turbulento, hemos analizado la posibilidad de que la racionalidad que debe existir en los datos financieros se manifieste a través de la interpretación, ya mencionada, de los inversores como vórtices turbulentos, entre los que se produce una transmisión de conocimiento (cascada de vórtices). La absorción de información por parte de los inversores se puede interpretar, en consecuencia, como un alargamiento de los vórtices y, dado que ese alargamiento es una característica propia de la turbulencia 3D, el mercado financiero debe manifestar ese tipo de turbulencia. En ese sentido, con objeto de conocer el grado de tridimensionalidad que presentan los mercados, hemos caracterizado su comportamiento mediante un modelo GOY, pues como hemos visto, es un modelo que permite situar ese grado de tridimensionalidad a partir del valor de un parámetro ( $\delta$ ). Los resultados muestran, con bastante claridad, que todos los mercados, salvo el *DOWJONES*, presentan un comportamiento propio de la turbulencia 3D. En realidad, el modelo GOY no es capaz de reproducir el caso del *DOWJONES*, al no haberse desarrollado totalmente la turbulencia, pero ello indica que ese índice debe presentar una conducta similar a la

## Resumen y conclusiones

---

de las situaciones más estables en la atmósfera y, por tanto, más próxima a la de la turbulencia 2D. En consecuencia, la racionalidad presente en los otros índices tiene mucha menor importancia en el caso del *DOWJONES*, debido a su peculiar ponderación (sólo con precios) y al hecho de trabajar fundamentalmente con empresas no dedicadas a la innovación tecnológica.

Sin embargo, en el caso de los datos atmosféricos, la turbulencia presenta un carácter más o menos tridimensional dependiendo de las condiciones atmosféricas (no siempre es tan claramente tridimensional como ocurre en la mayoría de índices financieros).



## **Referencias**

## Referencias

---

- Addison PS (1997) Fractals and chaos. Institute of Physics, Bristol. 256 pp
- Arimitsu T, Arimitsu N (2005) Multifractal analysis of the fat-tail PDFs observed in fully developed turbulence. J Phys: Conf. Ser. 7 101-120
- Arya, SPS (2001) Introduction to micrometeorology. Academic Press, San Diego, CA, 2<sup>nd</sup> ed. 420 pp
- Bakker A (2006) Lecture 9 - Kolmogorov's theory in applied computational fluid dynamics. <http://www.baker.org>
- Ballesteros R (2004) Turbulencia. <http://kimerius.com/app/download/5782492050/Turbulencia.pdf>
- Benzi R, Ciliberto S, Tripiccion R, Baudet C, Massaioli F, Succi S (1993) Extended self-similarity in turbulent flows. Phys Rev E 48 29-36
- Barabasi A-L, Szepefalusy P and Vicsek T (1991) Multifractal spectra of multi-affine functions. Phys A 178 17-28
- Barndorff-Nielsen OE, Blaesild P and Schmiegel J (2004) A parsimonious and universal description of turbulent velocity increments. Eur Phys J B 41 345-363
- Barndorff-Nielsen OE and Schmiegel J (2008) Time change, volatility and turbulence. in A. Sarychev, A. Shiryaev, A., M. Guerra. and M.d.R. Grossinho (Eds.): Proceedings of the Workshop on Mathematical Control Theory and Finance. Lisbon 2007. Berlin: Springer. 29-53 pp
- Batchelor GK and Townsend AA (1949) The nature of turbulent motions at large wave numbers. Proc Roy Soc A 199 238-255
- Batchelor GK (1969) Computation of the energy spectrum in homogeneous, two dimensional turbulence. Phys Fluids Suppl. II 12 233-239
- Biferale L (1993) Probability distribution functions in turbulent flows and shell models. Phys Fluids A 5 428-435
- Blackman RB and Tukey W (1958) The measurement of power spectra. Dover, New York. 190 pp
- Borwein J and Lewis A (2000) Convex analysis and nonlinear optimization. Springer-Verlag, New York. 273 pp
- Bottcher F, Barth S and Peinke J (2007) Small and large scale fluctuations in atmospheric wind speeds. Stochastic environmental research and risk assessment 21 299-308

## Referencias

---

- Bowman JC, Doering CR, Eckhardt B, Davoudi J, Roberts M and Schumacher J (2006) Links between dissipation, intermittency and helicity in the GOY model revisited. *Physica D* 218 1-10
- Brock WA (1999) Scaling in economics: a reader's guide. *Ind. Corporate Change* 8 409-446.
- Burattini P, Lavoie P and Antonia RA (2005) On the normalized turbulent energy dissipation rate. *Phys Fluids* 17 098103
- Cartea A and Howison S (2002) Distinguished limits of Lévy-stable processes, and applications of option pricing, OFRC Working Papers Series 2002mf04, Oxford Financial Research Centre
- Castaing B, Gagne Y and Hopfinger E J (1990) Velocity probability density fluctuations of high Reynolds number turbulence. *Physica D* 46 177-200
- Cattoni D, Ozu M and Chara O (2004), Ruidos en la naturaleza, *ANALES AFA*. Tandil, Argentina: CRECIC 16 294-299
- Chen W and Zhou HB (2005) Lévy-Kolmogorov scaling of turbulence. eprint arXiv:math-ph/0506039
- Chevillard L, Castaing B and Lévêque E (2005) On the rapid increase of intermittency in the near-dissipation range of fully developed turbulence. *Eur. Phys. J.B* 45 561-567
- Conangla L and Cuxart J (2006) On the turbulence in the upper part of the low-level jet: an experimental and numerical study. *Boundary-Layer Meteorol* 118 379–400
- Conangla L, Cuxart J, Soler MR (2008) Characterisation of the nocturnal boundary layer at a site in northern Spain. *Boundary-Layer Meteorol* 128 255-276
- Constantin P, Levant B and Titi ES (2007) A note on the regularity of inviscid shell models of turbulence. *Phys Review E* 75 016304 1-10
- Cuxart J, Yagüe C, Morales G, Terradellas E, Orbe J, Calvo J, Fernández A, Soler MR, Infante C, Buenestado P, Espinalt A, Joergensen HE, Rees JM, Vilà J, Redondo JM, Cantalapiedra IR, Conangla L (2000) Stable atmospheric boundary-layer experiment in Spain (SABLES98): a report. *Boundary-Layer Meteorol* 96 337–370
- Cuxart J, Morales G, Terradellas E, Yagüe C (2002) Study of coherent structures and estimation of the pressure transport terms for the nocturnal stable boundary layer. *Boundary-Layer Meteorol* 105 305–328



## Referencias

---

- Cuxart J (2008) Nocturnal basin low-level jets: an integrated study. *Acta Geophys* 56 100-113
- Dacorogna MM, Gencay R, Muller UA, Olsen RB and Pictet OV (2001) An introduction to high frequency finance. Academic Press, San Diego, CA. 383 pp
- Di Matteo T, Aste,T and Dacorogna M.M (2005) Long-term memories of developed and emerging markets: using the scaling analysis to characterize their stage of development. *J Bank Finan* 29 827-851.
- Di Matteo T (2007) Multi-scaling in finance. *Quantitative Finance* 7 21-36
- Ditlevsen PD (1996) Temporal intermittency and cascades in shell models of turbulence. *Phys Rev E* 54 985-988
- Ditlevsen PD (2004) Turbulence and climate dynamics. Print J&R Frydenberg A/S. Copenhagen. 349 pp
- Ditlevsen PD (2011) Turbulence and shell models. Cambridge University Press, New York. 168 pp
- Ditlevsen PD and Mogensen IA (1996) Cascades and statistical equilibrium in shell models of turbulence. *Phys Rev E* 53 4785-4793
- Dubrulle B (1994) Intermittency in fully developed turbulence: Log-Poisson statistics and generalized scale covariance. *Phys Rev Lett* 73 959-962
- Frisch U (1995) Turbulence. Cambridge University Press, England. 296 pp
- Gabaix X (2008) Power laws in economics and finance. NBER Working Paper 14299
- Gage KS and Nastrom GD (1986) Theoretical interpretation of atmospheric wavenumber spectra of wind and temperature observed by commercial aircraft during GASP. *J Atmos Sci* 43 729-740
- Gagne Y, Marchand M, Castaing B (1994) Conditional velocity pdf in 3-D turbulence. *J Phys II France* 4 1-8
- Ganti V, Singh A, Passalacqua P, Foufoula-Georgiou E (2009) Subordinated brownian motion model for sediment transport. *Phys Rev E* 80 011111
- Gencay R, Selcuk F and Whitcher B (2001) Scaling properties of foreign exchange volatility. *Physica A* 289 249-266
- Ghasemi F, Peinke J, Sahimi M and Rahimi Tabar MR (2005) Regeneration of stochastic processes: an inverse method. *Eur Phys J B* 47 411-415
- Ghashghaie S, Brewmann W, Peinke J, Talkner P and Dodge Y (1996) Turbulent cascades in foreign exchange markets. *Nature* 381 767-770

## Referencias

---

- Giuliani P, Jensen MH and Yakhot V (2002) Critical “dimension” in shell model turbulence. *Phys Rev E* 65 036305
- Gledzer EB (1973) System of hydrodynamic type admitting two quadratic integrals of motion. *Sov Phys Dokl* 18 216-217
- Gonçaves P and Riedi R (1999) Wavelet analysis of fractional brownian motion in multifractal time. Dix-septième colloque GRETSI, Vannes, 13-17 septembre
- Grout H, Tarquis AM and Wiesner MR (1998) Multifractal analysis of particle size distributions in soil. *Environmental Science & Technology* 32 1176-1182
- Gutierrez J.M. and Rodriguez M.A (2000) New exact method for obtaining the multifractal spectrum of multinomial measures and IFSP invariant measures. *Chaos, Solitons and Fractals* 11 675-683
- Hausdorff F (1919) Dimension and äußeres Maß, *Mathematische Annalen* 79 157-179
- Hinze JO (1959) *Turbulence: an introduction to its mechanism and theory*. MacGraw-Hill, New York. 586 pp
- Hu K, Ivanov PCh, Chen Z, Carpena P and Stanley HE (2001) Effect of trends on detrended fluctuation analysis. *Phys Rev E* 64 011114
- Hurst HE (1951), Long-term storage capacity of reservoirs. *Trans Am Soc civ Engrs* 116 770–808
- Julia G (1918) Memoire sur l’iteration des fonctions rationnelles. *J Math Pure et Appl* 8 47-245
- Kadanoff L, Lohse D, Wang J and Benzi R (1995) Scaling and dissipation in the GOY shell model. *Phys Fluids* 7 617-629
- Kolmogorov AN (1941) Dissipation of energy in locally isotropic turbulence. *C R Acad Sci USSR* 32 16-18
- Kolmogorov AN (1962) A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number. *J Fluid Mech* 13 82-85
- Kraichnan RH (1967) Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Phys Fluids* 10 1417-1423
- Landau LD and Lifshitz EM (1959) *Fluids Mechanics*. Pergamon Press, Oxford. 536 pp

## Referencias

---

- Lantsman Y and Major JA (2001) Actuarial applications of multifractal modeling, Part II: Time series applications Non-Refereed Paper/Article Casualty Actuarial Society Forum Casualty Actuarial Society - Arlington, Virginia: Winter 375-398
- Lauwerier HA and Kaandorp JA (1988) Fractals (Mathematics, Programming and Applications). Proceeding Advances in Computer graphics III (Tutorials from Eurographics 87 Conf.) Springer-Verlag, London 177-205
- Leith CE (1968) Diffusion approximation for two dimensional turbulence. Phys Fluids 11 671-673
- Lesieur M (1997) Turbulence in Fluids. Kluwer, Dordrecht. 515 pp
- Lévy P (1925) Calcul des probabilités. Gauthier-Villars, Paris.
- Levy S (2004) El mercado financiero: ¿eficiente o predio de la complejidad?. Revista venezolana de análisis de coyuntura X (1) (ene-jun) 29-45
- Li Y and Meneveau C (2005) Origin of non-gaussian statistics in hydrodynamic turbulence. Phys Rev Lett 95 164502 1-4
- Li Y and Meneveau C (2006) Intermittency trends and lagrangian evolution of non-gaussian statistics in turbulent flow and scalar transport. J. Fluid Mech 558 133-142
- Lind PG, Mora A, Haase M. and Gallas JAC (2007) Minimizing stochasticity in the NAO index. Int J Bifurcation and Chaos 17 3461-3466
- Loffredo, MI (2004) On the statistical physics contribution to quantitative finance. Int J mod Phys B 18 705-713.
- Lück St (2001) Skalen aufgelöste Experimente und statistische Analysen von turbulenten Nachlaufströmungen. PhD thesis, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg. 144 pp
- Lux T (2001) Turbulence in financial markets: the surprising explanatory power of simple cascade models. Quantitative Finance 1 632-640.
- Lux T (2003) Market fluctuations: scaling, multi-scaling and their possible origins. In Theories of Disasters: Scaling Laws Governing Weather, Body and Stock Market Dynamics. A. Bunde and H.-J. Schellnhuber (eds), Springer, Berlin.
- Mahjoub OB (2000) Non-local dynamics and intermittency in non-homogeneous flows. PhD thesis, Technical University of Catalonia (UPC). 139 pp
- Mahrt L (1989) Intermittency of atmospheric turbulence. J Atmos Sci 46 79-85
- Mahrt L (1997) Observations of turbulence in stratified flow. J Atmos Sci 44 1106-1121

## Referencias

---

- Mahrt L (1999) Stratified atmospheric boundary layers. *Boundary-Layer Meteorol* 90 375-396
- Mahrt L (2009) Characteristics of submeso winds in the stable boundary layer. *Boundary-Layer Meteorol* 130 1–14
- Mahrt L (2010) Variability and maintenance of turbulence in the very stable boundary layer. *Boundary-Layer Meteorol* 135 1–18
- Mandelbrot BB (1972) Possible refinements of the lognormal hypothesis concerning the distribution of energy dissipation in intermittent turbulence, M Rosenblatt and C Van Atta (eds), *Statistical Models and Turbulence*, Springer Verlag, New York. 333-351
- Mandelbrot BB (1977) *Fractals: form, chance and dimension*. WH Freeman, San Francisco. 365 pp
- Mandelbrot BB (1982) *The fractal geometry of nature*. WH Freeman, New York. 468 pp
- Mandelbrot BB (1997) *Fractals and scaling in finance*. Springer, New York. 551 pp
- Mantegna RN and Stanley HE (1995) Scaling behaviour in the dynamics of an economic index. *Nature* 376 46-49
- Mantegna RN and Stanley HE (1996) Turbulence and financial markets. *Nature* 383 587-588
- Mantegna RN and Stanley HE (2000) *An introduction to Econophysics*. Cambridge University Press, England. 148 pp
- Marcq P and Naert A (1998) A langevin equation for the energy cascade in fully-developed turbulence. *Physica D* 124 368-38
- Marsch E and Tu C-Y (1997) Intermittency, non-Gaussian statistics and fractal scaling of MHD fluctuations in the solar wind. *Nonlinear Process Geophys* 4 101-124
- Matassini L (2001): Signal analysis and modelling of non-linear non-stationarity phenomena. From human voice to financial markets. PhD thesis, Bergische University of Wuppertal. 152 pp
- Meneveau C and Sreenivasan KR (1987) Simple multifractal cascade model for fully developed turbulence. *Phys Rev Lett* 59 1424-1427
- Moffatt HK (1992) Helicity in laminar and turbulent flow. *Annu Rev Fluid Mech* 24 281-312

## Referencias

---

- Mordant N, Metz P, Michel O and Pinton JF (2001) Measurement of lagrangian velocity in fully developed turbulence. *Phys Rev Lett* 87 214501
- Müller UA, Dacorogna M.M, Olsen RB, Pictet OV, Schwarz M and Morgenegg C (1990) Statistical study of foreign exchange rates, empirical evidence of a price change scaling law, and intraday analysis. *J Bank Finan* 14 1189-1208
- Muñoz J (2005) Movimiento browniano y geometria fractal: El IBEX 35. XIII Jornadas de ASEPUMA, Universidad de Sevilla
- Nastrom GD and Gage KS (1985) A climatology of atmospheric wavenumber spectra of wind and temperature observed by commercial aircraft. *J Atmos Sci* 42 950-960
- Nawroth AP and Peinke J (2007) Medium and small-scale analysis of financial data. *Physica A* 382 193-198
- Pagel C and Balogh A (2001) A study of magnetic fluctuations and their anomalous scaling in the solar wind: the Ulysses fast-latitude scan. *Nonlinear Process Geophys* 8 313-330
- Paret J and Tabeling P (1998) Intermittency in the two-dimensional inverse cascade of energy: experimental observations. *Phys Fluids* 10 3126-3136
- Percival DB and Walden AT (2000) *Wavelet Methods for Time Series Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge. 594 pp
- Pisarenko D, Biferale L, Courvoisier D, Frisch U and Vergassola M (1993) Further results on multifractality in shell models. *Phys. Fluids A* 5 2533-2538
- Pope SB (2000) *Turbulent flows*. Cambridge University Press, England. 748 pp
- Renner Ch, Reisner B, Lück St, Peinke J, Friedrich R (1999) On the statistics of small scale turbulence and its universality. *Trends in mathematics*, Verlag Basel, Switzerland 353-360
- Renner Ch, Peinke J and Friedrich R (2001) Experimental indications for Markov properties of small-scale turbulence. *J Fluid Mech* 433 383-409
- Renner Ch, Peinke J, Friedrich R, Chanal O and Chabaud B (2002) On the universality of small scale turbulence. *Phys Rev Lett*.89 124502
- Richards-Pecou B (2002) Scale invariance analysis of channel network width function and possible implications for flood behaviour. *Hydrological Sciences – Journal – des Sciences Hydrologiques* 47 387
- Richardson LF (1922) *Weather prediction by numerical process*. Cambridge Universtity Press, England. 236 pp

## Referencias

---

- Risken H (1984) *The Fokker-Planck Equation*. Springer-Verlag, Berlin. 454 pp
- San José R, Casanova JL, Viloria RE and Casanova J (1985) Evaluation of the turbulent parameters of the unstable surface boundary Layer outside Businger's range. *Atmos Environ* 19 1555–1561
- Schmidt W, Niemeyer JC and Hillebrandt W (2006) A localised subgrid scale model for fluid dynamical simulations in astrophysics I: Theory and numerical tests. *Astronomy & Astrophysics* 3618 1-13
- Schroeder M (1991) *Fractals, chaos and power laws*. W. H. Freeman and Co., New York.
- She Z-S and Lévêque E (1994) Universal scaling laws in fully developed turbulence. *Phys Rev Lett* 72 336
- She Z-S and Waymire ES (1995) Quantized energy cascade and log-Poisson statistics in fully developed turbulence. *Phys Rev Lett* 74 262-265
- Smith LM and Yakhot V (1993) Condensation and small-scale structure generation in a random force driven 2D turbulence. *Phys Rev Lett* 71 352-355
- Sorriso-Valvo L, Carbone V, Veltri P, Politano H and Pouquet A (2000) Non-Gaussian probability distribution functions in two dimensional magnetohydrodynamic turbulence. *Europhys Lett* 51 520-526
- Stanley HE (1987) *Introduction to phase transitions and critical phenomena*. Oxford University Press, New York. 336 pp
- Stull RB (1988) *An Introduction to Boundary Layer Meteorology*. Kluwer, Dordrecht. 666 pp
- Talanquer V (1996) Fractus, fracta, fractal. *Fractales, de laberintos y espejos*. [http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/ciencia/volumen3/ciencia3/147/htm/sec\\_5.htm](http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/ciencia/volumen3/ciencia3/147/htm/sec_5.htm)
- Tarquis A M, McInnes K J, Key JR et al. (2006) Multiscaling analysis in a structured clay soil using 2D images. *Journal of Hydrology* 330 766-766
- Tarquis A M, Morato MC, Castellanos MT et al. (2008) Comparison of structure function and detrended fluctuation analysis of wind time series. *Nuovo Cimento della Societa Italiana di Fisica* 31 633-651
- Taylor GI (1938) The spectrum of turbulence. *Proc R Soc Lond* 164 476–490
- Tennekes H and Lumley JL (1972) *A first course in turbulence*. MIT Press, Cambridge, MA. 390 pp

## Referencias

---

- Terradellas E, Morales G, Cuxart J and Yagüe C (2001) Wavelets methods: application to the study of the stable atmospheric boundary layer under non-stationary conditions. *Dyn Atmos Oceans* 34 225-244
- Terradellas E, Soler MR, Ferreres E and Bravo M (2005) Analysis of oscillations in the stable atmospheric boundary layer using Wavelet methods. *Boundary-Layer Meteorol* 114 489-518
- Trincado E and Vindel JM (2012a) Not fully developed turbulence in the Dow Jones index (*Submitted to Brazilian Journal of Physics*)
- Trincado E and Vindel JM (2012b) Turbulence and utilitarianism in the economic texts (*Submitted to Oeconomia*)
- Vasconcelos GL (2004) A guided walk down Wall Street: An introduction to econophysics. *Brazilian Journal of physics* 34 1039-1065
- Viana S, Yagüe C and Maqueda G (2009) Propagation and effects of a mesoscale gravity-wave over a weakly-stratified nocturnal boundary layer during SABLES2006 field campaign. *Boundary-Layer Meteorol* 133 165–188
- Viana S, Terradellas E and Yagüe C (2010) Analysis of gravity waves generated at the top of a drainage flow. *J Atmos Sci* 67 3949–3966
- Viana S (2011): Estudio de los procesos físicos que tienen lugar en la capa límite atmosférica nocturna a partir de campañas experimentales de campo. PhD thesis, Universidad Complutense de Madrid. 240 pp
- Viana S, Yagüe C and Maqueda G. (2012) Vertical structure of the stable boundary layer detected by RASS-SODAR and in-situ measurements in SABLES 2006 field campaign. *Acta Geophys* 60 1261-1286
- Vindel JM, Yagüe C and Redondo JM (2008a) Relationship between intermittency and stratification. *Nuovo Cimento C. Geophysics and Space Physics* 31 669-678
- Vindel JM, Yagüe C and Redondo JM (2008b) Structure function analysis and intermittency in the atmospheric boundary layer. *Nonlinear Process Geophys* 15 915-929
- Vindel JM and Yagüe C (2009) Application of a GOY model to atmospheric boundary layer data. *Nonlinear Process Geophys* 16 599-606
- Vindel JM and Trincado E (2010) The timing of information transmission in financial markets. *Physica A* 3895749-5758

## Referencias

---

- Vindel JM and Yague C (2011) Intermittency of turbulence in the atmospheric boundary layer: scaling exponents and stratification influence. *Boundary-Layer Meteorol* 140 73-85
- Wyngaard JC (2010) *Turbulence in the atmosphere*. Cambridge University Press, England. 393 pp
- Yagüe C, Redondo J M (1995) A case study of turbulent parameters during the Antarctic winter. *Antarctic Science* 7 421- 423
- Yagüe C, Viana S, Maqueda G and Redondo JM (2006) Influence of stability on the flux-profile relationships for wind speed,  $\phi_m$ , and temperature,  $\phi_h$ , for the stable atmospheric boundary layer. *Nonlinear Process Geophys* 13 185–203
- Yamada M and Ohkitani K (1987) Lyapunov spectrum of a chaotic model of three-dimensional turbulence. *J Phys Soc of Japan* 56 4210-4213
- Zhu W, van Hout R and Katz J (2006) A comparison of methods to estimate the dissipation rate in a wind tunnel canopy flow model, 17<sup>th</sup> Symposium on Boundary Layers and Turbulence, San Diego, CA, May 22-26.





## **Apéndices**

## **Apéndice I (Distribuciones de Lévy)**

Un proceso de Lévy es aquel proceso estocástico en el que las variaciones que experimenta la variable en cuestión presentan dos características: constituyen una serie estacionaria y son independientes. Las distribuciones de Lévy también se denominan de “cola larga”, y en ellas, una gran frecuencia de los eventos va seguida por un gradual descenso de esa frecuencia. Estas distribuciones son estables, es decir, la suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas presenta una función de densidad de probabilidad que se puede transformar en la función de densidad de dichas variables mediante una transformación lineal.

También se puede decir que  $X(t)$  es un proceso estable si presenta la siguiente función característica:

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= e^{\left[ i\mu t - \gamma |t|^\alpha \left[ 1 - i\beta \operatorname{sgn}(z) \tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right] \right]}, \text{ para } \alpha \neq 1 \\ \varphi_X(t) &= e^{\left[ i\mu t - \gamma |t| \left[ 1 + i\beta \operatorname{sgn}(z) \frac{2}{\pi} \ln|t| \right] \right]}, \text{ para } \alpha = 1\end{aligned}\tag{Ap.I.1}$$

Esta función se caracteriza por cuatro parámetros (Levy 2004):

$\alpha$ : llamado parámetro de estabilidad; varía entre (0,2]. Mide la frecuencia de las grandes dispersiones e indica lo puntiaguada que es la distribución. Si una distribución es normal  $\alpha=2$ , y si  $\alpha=1$  es una distribución de Cauchy.

$\beta$ : llamado parámetro de simetría o sesgo de la serie; varía entre [-1,1]. Si  $\beta=0$  la serie es simétrica;  $\beta < 0$  supone asimetría hacia la izquierda, lo que significa que son más frecuentes grandes cambios negativos que grandes cambios positivos (o que son más frecuentes pequeños cambios positivos que pequeños cambios negativos). Análogamente, pero en sentido contrario, para  $\beta > 0$ .

$\mu$ : llamado parámetro de localización; indica el valor promedio de la serie. Únicamente se define en las distribuciones normales.

## Apéndice I

$\gamma$ : llamado parámetro de escala o dispersión; mide el tamaño de los cambios. Se encuentra ligado al concepto de volatilidad, y solo se puede calcular en el caso de las distribuciones normales.

Los procesos estables presentan, para valores grandes de la variable, la siguiente ley de probabilidad:

$$f(x) \propto C|x|^{-(1+\alpha)}, \quad \text{para } x \gg 1 \quad (\text{Ap.I.2})$$

Es decir, en las distribuciones de los procesos estables se produce un decaimiento de las colas.

## **Apéndice II (Método de Blackman & Tukey)**

Este procedimiento utiliza las siguientes expresiones para obtener las estimaciones espectrales  $\hat{S}_k$  :

$$\hat{S}_0 = \frac{1}{2m}(c_0 + c_m) + \frac{1}{m} \sum_1^{m-1} c_\tau \quad (\text{Ap.II.1})$$

$$\hat{S}_k = \frac{c_0}{m} + \frac{2}{m} \sum_1^{m-1} c_\tau \cos\left(\frac{\pi k \tau}{m}\right) + \frac{1}{m} c_m (-1)^k \quad (\text{Ap.II.2})$$

$$\hat{S}_m = \frac{1}{2m}[c_0 + (-1)^m c_m] + \frac{1}{m} \sum_1^{m-1} (-1)^\tau c_\tau \quad (\text{Ap.II.3})$$

$c_\tau$  es la autocovarianza para un desfase  $\tau$ .

$m$  es el número máximo de desfases o *lags* que consideramos en la serie. Este número no puede ser demasiado elevado puesto que de ser así se correría el riesgo de correlacionar las colas de la serie, lo que daría lugar a errores, y tampoco puede ser muy bajo, pues de lo contrario podrían no detectarse periodos que presentasen picos importantes, es decir, periodos significativos. Un valor adecuado se encuentra entre 1/3 y 1/5 del número de datos.

La primera expresión corresponde a la estimación para una frecuencia de 0. La tercera expresión a la estimación para la frecuencia máxima resoluble, es decir, para la frecuencia de Nyquist que se calcula haciendo el cociente:  $\frac{1}{2\Delta t}$ , donde  $\Delta t$  es el periodo transcurrido entre dos valores consecutivos de la serie temporal. La segunda expresión se emplea para calcular las estimaciones espectrales correspondientes al resto de frecuencias.

Los valores así calculados son sometidos no obstante a un proceso de suavizado por el método de Hamming para obtener las estimaciones finales. De acuerdo con este método:

## Apéndice II

$$\hat{S}_0 = \frac{1}{2}(\hat{S}_0 + \hat{S}_1) \quad (\text{Ap.II.4})$$

$$\hat{S}_k = \frac{1}{4}(\hat{S}_{k-1} + 2\hat{S}_k + \hat{S}_{k+1}) \quad (\text{Ap.II.5})$$

$$\hat{S}_m = \frac{1}{2}(\hat{S}_{m-1} + \hat{S}_m) \quad (\text{Ap.II.6})$$

## **Apéndice III (Análisis en cascada multiplicativa)**

En cada paso de la cascada de Richardson, la disipación (o la velocidad) disminuyen en un factor aleatorio. El diámetro de los remolinos se supone que disminuye por un factor constante  $\delta$  (que habitualmente se supone igual a  $1/2$ ). Utilizando Frisch (1995):

$$l_n = l_0 \delta^n = l_0 \left( \frac{1}{2} \right)^n \quad (\text{Ap.III.1})$$

$$\varepsilon_n = W_1 W_2 \dots W_n \varepsilon \quad (\text{Ap.III.2})$$

Las variables aleatorias  $q_i$  (o las variables  $W_i$ ) son independientes y se distribuyen idénticamente. Esas variables son las realizaciones de las variables  $q$  y  $W$ , que deben cumplir las siguientes condiciones:

$$W \geq 0, \quad \langle W \rangle = 1 \quad \langle W^q \rangle < \infty, \quad \forall q > 0 \quad (\text{Ap.III.3})$$

Los momentos de orden  $q$  para la disipación resultan:

$$\langle \varepsilon_n^q \rangle = \varepsilon^q \left( \frac{l_n}{l_0} \right)^{-\log_2 \langle W^q \rangle} \quad (\text{Ap.III.4})$$

Por tanto, de acuerdo con la ecuación (3.15),  $\tau_q = -\log_2 \langle W^q \rangle$  y, en consecuencia:

$$\zeta_p = \frac{p}{3} - \log_2 \langle W^{p/3} \rangle \quad (\text{Ap.III.5})$$

Llegados a este punto, antes de continuar resulta conveniente referirse al teorema de las grandes desviaciones (Frisch 1995):

Sea un conjunto de  $n$  realizaciones independientes y efectuadas en las mismas condiciones,  $m_i$ , de una variable  $m$ . Esas realizaciones constituyen un conjunto de

### Apéndice III

variables aleatorias independientes con la misma distribución. De acuerdo con la ley de los grandes números, cuando  $n$  tiende hacia infinito, el estadístico  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i$  tiende al valor esperado para la variable  $m$ .

Sea la función  $h(n; a, b) \equiv \ln \Pr\{a < S_n < b\}$

Esta función cumple que  $h(n + n'; a, b) \geq h(n; a, b) + h(n'; a, b)$ , lo que hace que exista el siguiente límite:

$$s(a, b) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h(n; a, b)}{n} = \sup_n \frac{h(n; a, b)}{n} \quad (\text{Ap.III.6})$$

Pues bien, el teorema de las grandes desviaciones establece que

$$\Pr\left\{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i \approx x\right\} \propto e^{ns(x)} \quad (\text{Ap.III.7})$$

siendo  $s(x) \equiv \sup_{a < x < b} s(a, b)$  la denominada función de Cramer.

Volvamos a la relación que proporciona la disipación en forma de cascada, y hagamos  $W_i \equiv 2^{-m_i}$ . Entonces tendremos:

$$\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon} = 2^{-(m_1 + m_2 + \dots + m_n)} \approx 2^{-nx} \quad (\text{Ap.III.8})$$

y, de acuerdo con la relación en cascada de la escala:

$$\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon} \approx \left(\frac{l_n}{l_0}\right)^x \quad (\text{Ap.III.9})$$



### Apéndice III

Dado que la fracción de volumen ocupado por los remolinos de tamaño  $l_n$  (por el teorema de las grandes desviaciones) presenta la siguiente proporcionalidad:

$p_n \propto e^{ns(x)}$ , si operamos, tenemos

$$p_n \propto \left( \frac{l_n}{l_0} \right)^{-s(x)/\ln 2} \quad (\text{Ap.III.10})$$

Pues bien, podemos comprobar que el modelo multifractal se corresponde con un modelo en cascada tomando:

$$x = \alpha - 1 \quad (\text{Ap.III.11})$$

$$-\frac{s(x)}{\ln 2} = 3 - F(\alpha)$$

En ese caso, tenemos:

$$F(\alpha) = 3 + \frac{s(\alpha - 1)}{\ln 2} \quad (\text{Ap.III.12})$$

$$f(\alpha) = 1 + \frac{s(\alpha - 1)}{\ln 2}$$

## **Apéndice IV (Dimensión fractal en el modelo K62)**

Siguiendo Frisch (1995), supongamos  $W=2^{-m}$ , y que  $m$  sigue una distribución Gaussiana. Sea  $\bar{m}$  la media de esa variable y  $\sigma^2$  su varianza (una notación habitual es  $\mu \equiv 2\bar{m}$ ).

Dado que  $\langle W \rangle = 1$ , tendremos que  $2\bar{m} = \sigma^2 \ln 2$ . Además, al ser  $m$  una variable normal,  $\sum_{i=1}^n m_i$  también seguirá una distribución Gaussiana.

Con las anteriores consideraciones, la función de Cramer queda:

$$s(x) = -\frac{\left(x - \frac{\mu}{2}\right)^2 \ln 2}{2\mu} \quad (\text{Ap.IV.1})$$

y, por tanto

$$F(\alpha) = 3 - \frac{\left(\alpha - 1 - \frac{\mu}{2}\right)^2}{2\mu} \quad (\text{Ap.IV.2})$$

$$f(\alpha) = 1 - \frac{\left(\alpha - 1 - \frac{\mu}{2}\right)^2}{2\mu} \quad (\text{Ap.IV.3})$$

## **Apéndice V (Ecuación de Navier-Stokes en el espacio de Fourier)**

Recordemos la expresión de la ecuación de Navier-Stokes en el espacio físico:

$$\frac{\partial \vec{u}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{u}(\vec{r}, t) \cdot \nabla \vec{u}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{\rho} \nabla p(\vec{r}, t) + \nu \nabla^2 \vec{u}(\vec{r}, t) \quad (\text{Ap.V.1})$$

Aplicando a esta ecuación la transformada de Fourier es posible expresarla en el espacio de Fourier o espacio de fases (Ditlevsen 2011). Para ello, recordemos algunas propiedades de la transformada de Fourier:

Sea  $TF [\vec{u}(\vec{r}, t)] = \vec{\hat{u}}(\vec{k}, t)$  la transformada de Fourier de  $\vec{u}$ , en ese caso:

$$TF [\nabla \cdot \vec{u}(\vec{r}, t)] = i\vec{k} \cdot \vec{\hat{u}}(\vec{k}, t) \quad (\text{Ap.V.2})$$

$$TF [\nabla^2 \vec{u}(\vec{r}, t)] = -k^2 \vec{\hat{u}}(\vec{k}, t) \quad (\text{Ap.V.3})$$

$$TF \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \right] = i k_i \vec{\hat{u}}(\vec{k}, t) \quad (\text{Ap.V.4})$$

Por tanto, de acuerdo con la condición de incompresibilidad,  $\nabla \cdot \vec{u}(\vec{r}, t) = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{\hat{u}}(\vec{k}, t) = 0$ . Es decir,  $\vec{\hat{u}}(\vec{k}, t)$  se encuentra en un plano perpendicular al vector  $\vec{k} (k_1, k_2, k_3)$ .

Análogamente,  $TF [\nabla p(\vec{r}, t)] = i\vec{k} \hat{p}(\vec{r}, t)$ , aunque en este caso, esa transformada representa un vector paralelo a  $\vec{k}$ .

La transformada de Fourier de  $\vec{u}(\vec{r}, t) \cdot \nabla \vec{u}(\vec{r}, t) + \frac{1}{\rho} \nabla p(\vec{r}, t)$  es la proyección sobre un plano perpendicular a  $\vec{k}$  de la transformada de Fourier de  $\vec{u}(\vec{r}, t) \cdot \nabla \vec{u}(\vec{r}, t)$ .

## Apéndice V

Por otra parte, la componente  $i$ -ésima de la proyección de un vector  $\vec{a} (a_1, a_2, a_3)$  sobre el plano perpendicular a  $\vec{k}$  se puede expresar como:  $a_j P_{ij}(\vec{k})$ , donde

$$P_{ij}(\vec{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}$$

De acuerdo con lo anterior y, recordando que la transformada de Fourier del producto de dos funciones es igual al producto de convolución de las transformadas de Fourier de ambas funciones, tendremos que

$$TF \left[ u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = TF \left[ \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} \right] = ik_j \int_{\vec{p}+\vec{q}=\vec{k}} \hat{u}_i(\vec{p}, t) \hat{u}_j(\vec{q}, t) d\vec{p} \quad (\text{Ap.V.5})$$

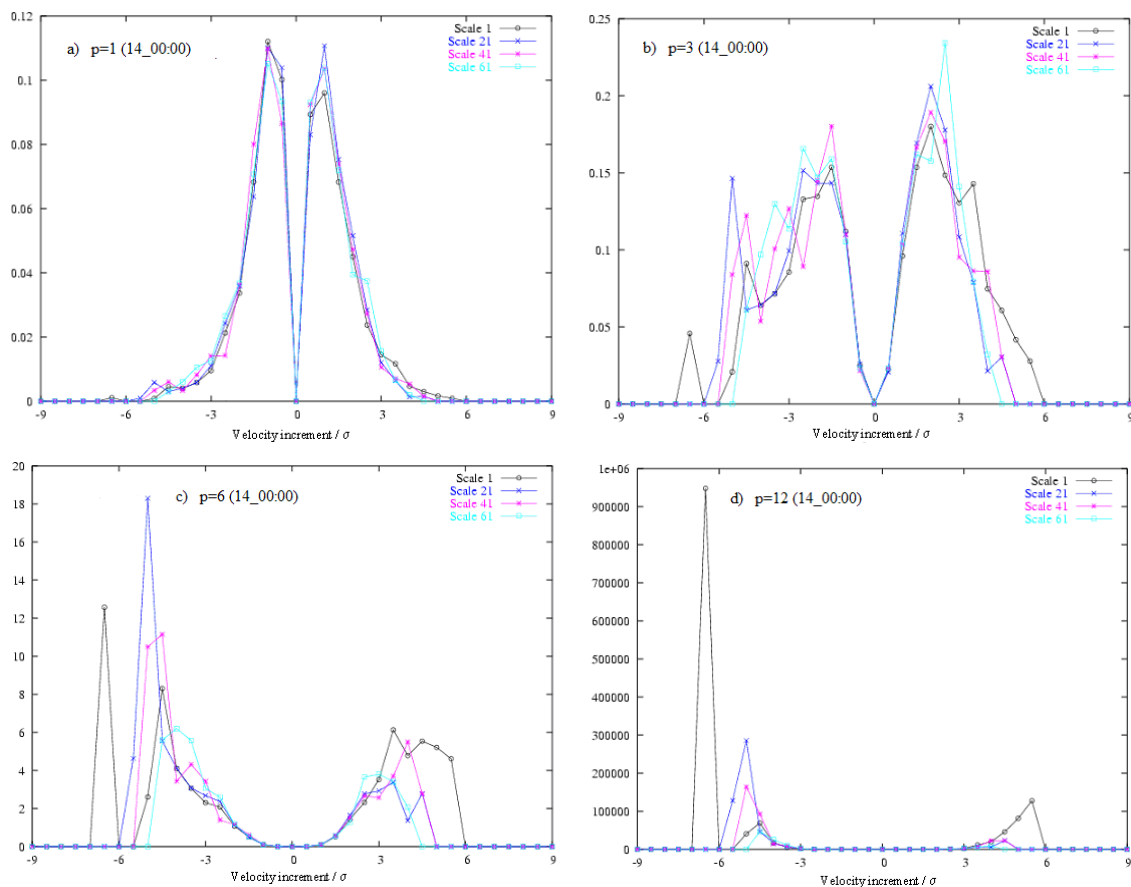
Por tanto la componente  $i$ -ésima de  $\vec{u}(\vec{r}, t) \cdot \nabla \vec{u}(\vec{r}, t) + \frac{1}{\rho} \nabla p(\vec{r}, t)$  en el espacio de Fourier será:  $ik_m P_{ij}(\vec{k}) \int_{\vec{p}+\vec{q}=\vec{k}} \hat{u}_j(\vec{p}, t) \hat{u}_m(\vec{q}, t) d\vec{p}$

Introduciendo esa expresión en la ecuación de Navier-Stokes, la componente  $i$ -ésima de esa ecuación queda:

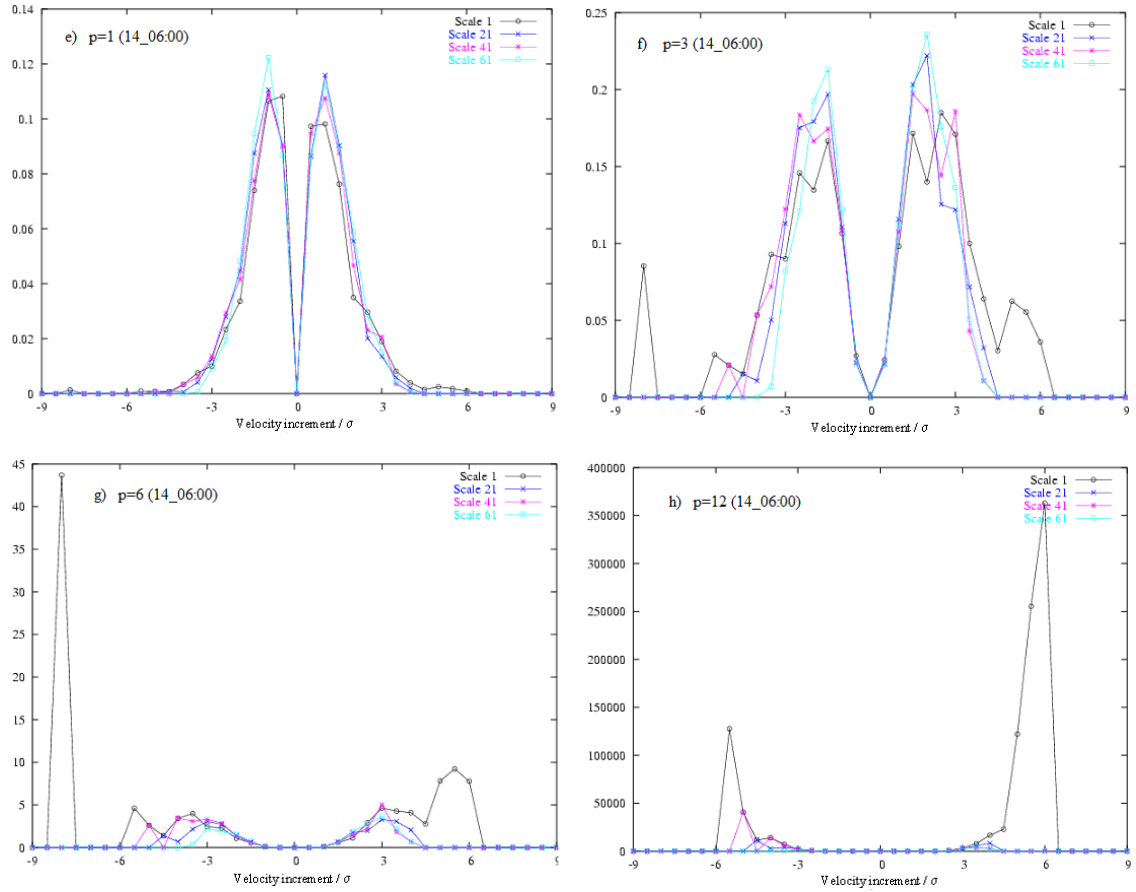
$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 \right) \hat{u}_i(\vec{k}, t) = -ik_m P_{ij}(\vec{k}) \int_{\vec{p}+\vec{q}=\vec{k}} \hat{u}_j(\vec{p}, t) \hat{u}_m(\vec{q}, t) d\vec{p} \quad (\text{Ap.V.6})$$

## **Apéndice VI (Convergencia estadística)**

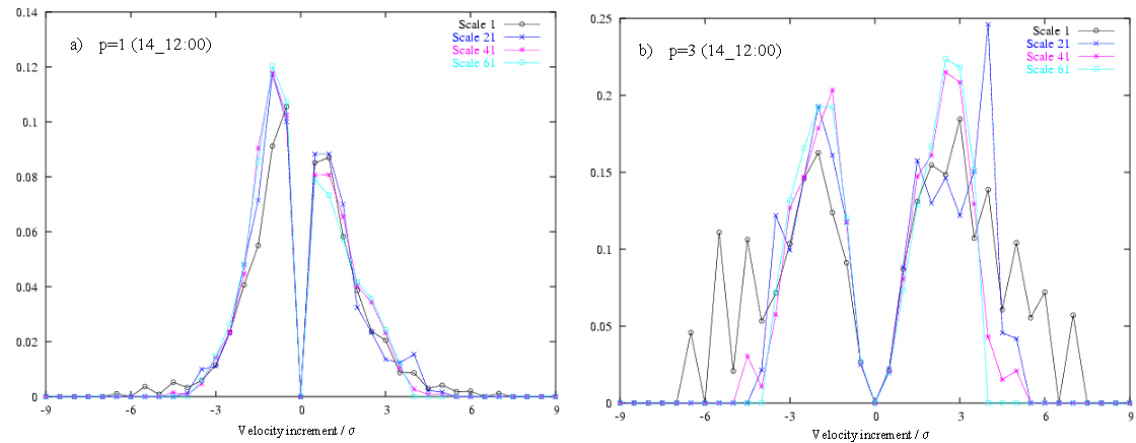
Para mostrar el grado de convergencia estadística mostrada por las funciones de estructura de los sucesivos órdenes, se calculan para la variable en cuestión (en nuestro caso, los incrementos de velocidad), el producto de la correspondiente probabilidad por la  $p$ -ésima potencia de esos incrementos (Schumacher 2001). El área bajo la curva obtenida corresponde al momento de orden  $p$  y, en consecuencia, la convergencia estadística de ese momento mejorará cuando la dispersión de la curva disminuya. Como ejemplo, en la Fig. Ap.VI.1, Ap.VI.2 y Ap.VI.3, se muestran esas curvas para varios órdenes: 1, 3, 6 y 12, para algunas de las situaciones analizadas en el trabajo (concretamente para 6 situaciones: el día 14 de septiembre a las 00:00, 06:00, 12:00 y 18:00 GMT, y el día 15 de septiembre a las 00:00 y a las 06:00 GMT) y para diferentes escalas temporales.



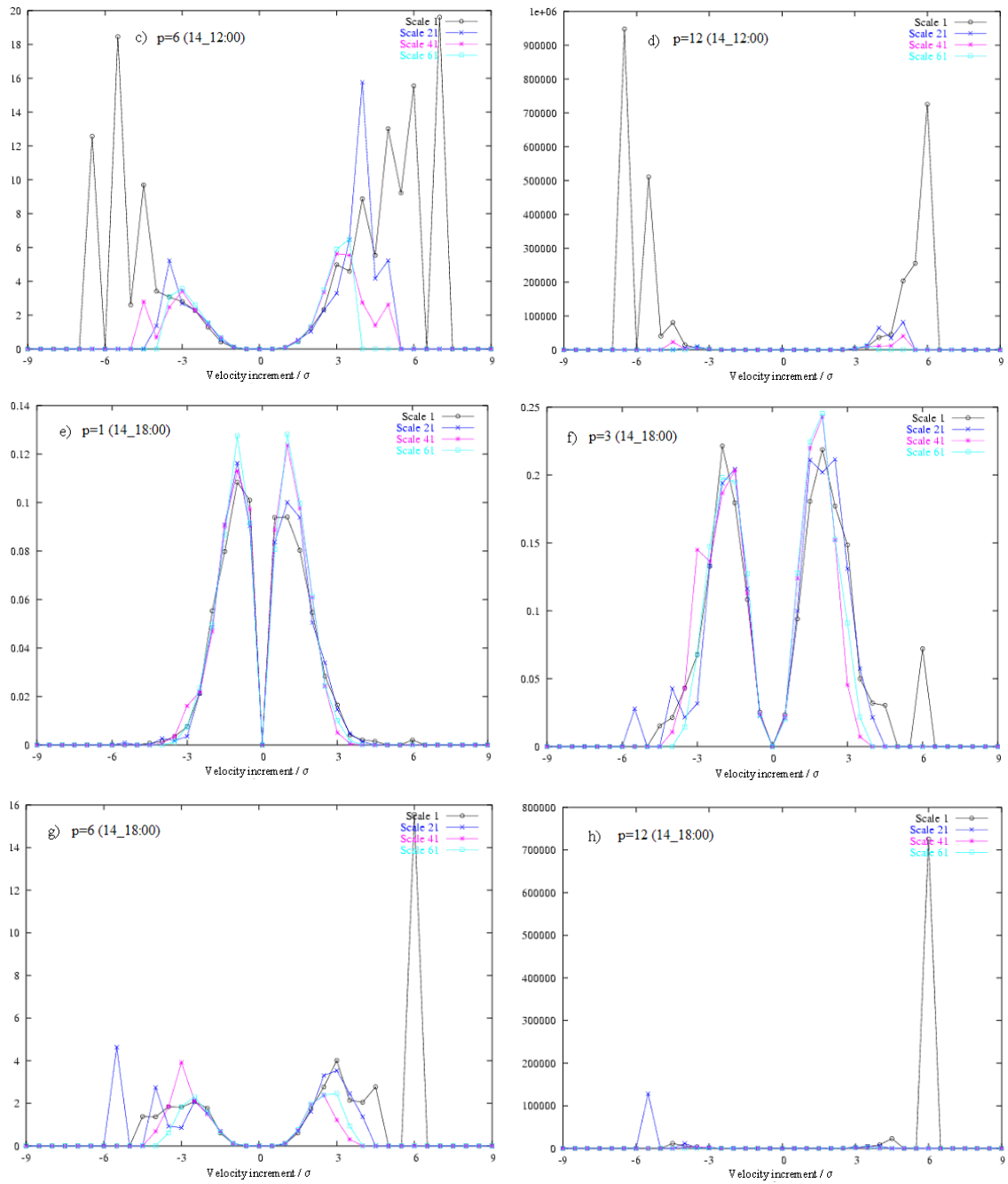
## Apéndice VI



**Figura Ap.VI.1:** Producto de la potencia  $p$ -ésima ( $p = 1, 2, 6$  y  $12$ ) de los incrementos de velocidad por su correspondiente probabilidad vs. los incrementos de velocidad para diferentes escalas: a), b), c) y d) para el día 14 de septiembre a las 00:00 GMT; e), f), g) y h) para el día 14 de septiembre a las 06:00 GMT

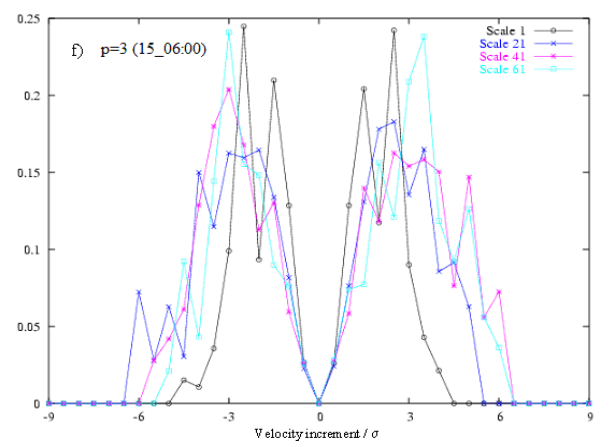
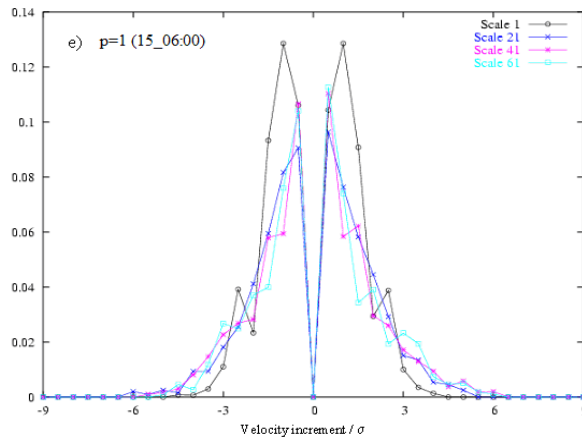
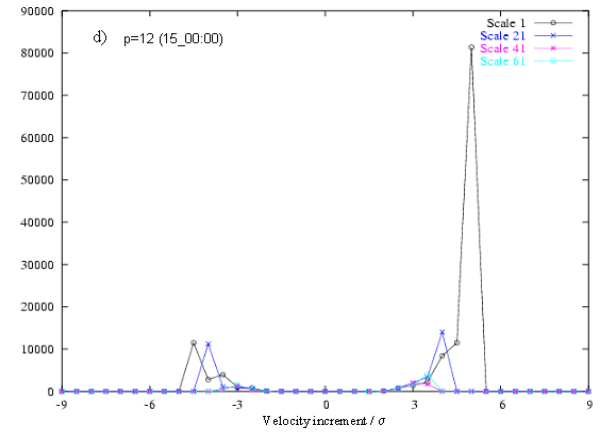
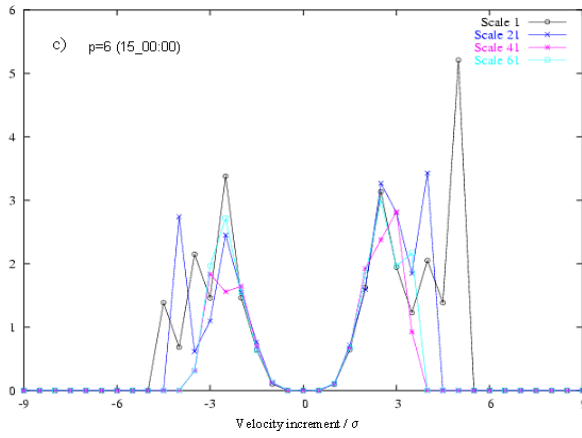
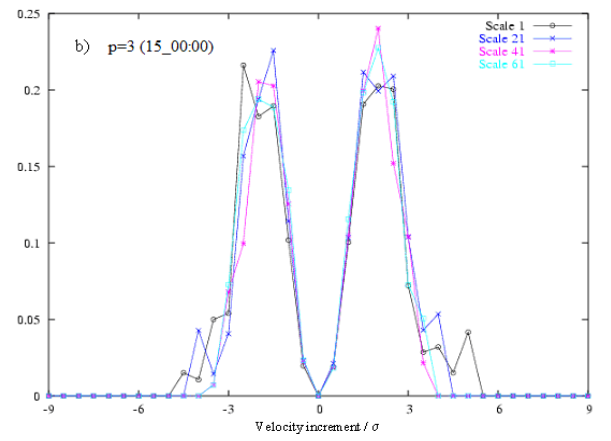
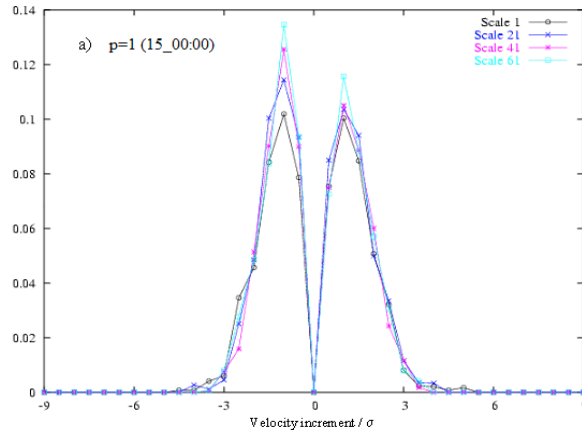


## Apéndice VI



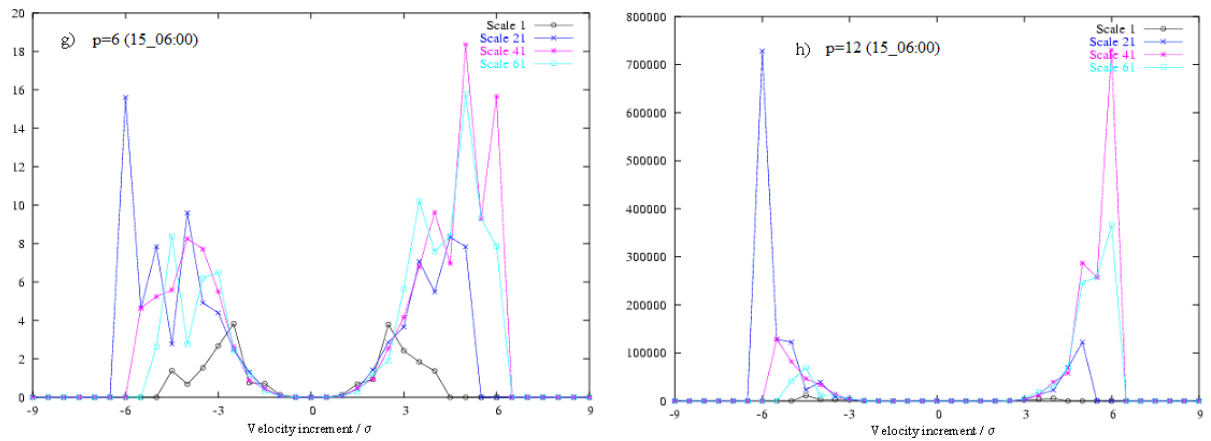
**Figura Ap.VI.2:** Producto de la potencia  $p$ -ésima ( $p = 1, 2, 6$  y  $12$ ) de los incrementos de velocidad por su correspondiente probabilidad vs. los incrementos de velocidad para diferentes escalas: a), b), c) y d) para el día 14 de septiembre a las 12:00 GMT; e), f), g) y h) para el día 14 de septiembre a las 18:00 GMT

## Apéndice VI





## Apéndice VI



**Figura Ap.VI.3:** Producto de la potencia  $p$ -ésima ( $p = 1, 2, 6$  y  $12$ ) de los incrementos de velocidad por su correspondiente probabilidad vs. los incrementos de velocidad para diferentes escalas: a), b), c) y d) para el día 15 de septiembre a las 00:00 GMT; e), f), g) y h) para el día 15 de septiembre a las 06:00 GMT

En las gráficas se observa que al disminuir la escala, y al aumentar el orden  $p$ , aumenta la falta de convergencia estadística.

## **Apéndice VII (Notación empleada)**

$l_n$	<i>Escala espacial correspondiente al paso <math>n</math></i>
$\delta$	1) <i>Nº de remolinos generados a partir de un remolino</i> 2) <i>Parámetro del modelo GOY</i>
$u_n$	1) <i>Velocidad de los remolinos en el paso <math>n</math></i> 2) <i>Velocidad del <math>n</math>-esimo shell</i>
$Re_n$	<i>Nº de Reynolds en el paso <math>n</math></i>
$\nu$	<i>Viscosidad cinemática</i>
$t_n^{rot}$	<i>Tiempo de vida de los remolinos en el paso <math>n</math></i>
$U$	<i>Flujo medio</i>
$t_n^{dis}$	<i>Tiempo de disipación de los remolinos en el paso <math>n</math></i>
$\Phi_n$	<i>Transferencia de energía (por unidad de masa ) en la unidad de tiempo en el paso <math>n</math></i>
$\epsilon_n$	<i>Tasa de disipación de energía (por unidad de masa) en el paso <math>n</math></i>
$E_n$	<i>Energía (por unidad de masa) de los remolinos en el paso <math>n</math></i>
$p_n$	<i>Fracción de volumen ocupado por los remolinos en el paso <math>n</math></i>
$\epsilon$	<i>Flujo de energía</i>
$R(t)$	<i>Función de autocorrelación</i>
$\eta$	<i>Escala espacial de Kolmogorov</i>
$E(\kappa)$	<i>Espectro de energía</i>
$b$	<i>Pendiente del espectro de potencia</i>
$p$	<i>Presión</i>
$\rho$	<i>Densidad</i>
$H$	1) <i>Helicidad</i> 2) <i>Exponente de Hurst</i> 3) <i>Segundo invariante en los modelos shell</i>
$\vec{\omega}$	<i>Vorticidad</i>
$Z$	<i>Enstrofia</i>

## Apéndice VII

$\Omega(k)$	<i>Espectro de enstrofia</i>
$\Delta\theta$	<i>Variación en la temperatura potencial</i>
$\Delta z$	<i>Distancia entre 2 niveles</i>
$X(t)$	<i>Proceso estocastico</i>
$h$	<i>Exponente de escala para la variable o Exponente de Lipschitz-Hölder</i>
$S_p$	<i>Función de estructura de orden <math>p</math></i>
$\zeta_p$	<i>Exponente de escala absoluto de la función de estructura de orden <math>p</math> para la velocidad</i>
$\bar{\zeta}_p$	<i>Exponente de escala relativo de la función de estructura de orden <math>p</math> para la velocidad</i>
$D(h)$	<i>Dimensión fractal correspondiente al fractal caracterizado por el exponente de escala para la velocidad <math>h</math></i>
$F(\alpha)$	<i>Dimensión fractal correspondiente al fractal caracterizado por el exponente de escala para la tasa de disipación de energía <math>\alpha</math></i>
$f(\alpha)$	<i>Dimensión fractal correspondiente al fractal caracterizado por el exponente de escala <math>\alpha</math> (<math>F(\alpha) = f(\alpha) + 2</math>)</i>
$\tau_p$	<i>Exponente de escala de la función de estructura de orden <math>p</math> para la tasa de disipación de energia</i>
$F$	<i>Curtosis de una distribución de probabilidad</i>
$\mu$	1) <i>Parámetro de intermitencia en el modelo log-normal</i> 2) <i>Parámetro de localización en las distribuciones estables</i>
$\beta$	1) <i>Flujo de enstrofia</i> 2) <i>Coficiente del término cuadrático de la función cuadrática de ajuste a la curva <math>\zeta_p</math> vs. <math>p</math> (empleado como parámetro de intermitencia)</i> 3) <i>Parámetro de intermitencia en el modelo She-Lévêque</i> 4) <i>Parámetro de intermitencia en el modelo <math>\beta</math></i> 5) <i>Parámetro de intermitencia en el modelo log-Poisson considerando la propiedad ESS</i> 6) <i>Parámetro en el modelo de difusión asociado al coeficiente difusión</i>

## Apéndice VII

	7) <i>Parámetro de simetría de las distribuciones estables</i>
$\alpha$	1) <i>Uno de los parámetros de intermitencia en el modelo She-Lévêque</i> 2) <i>Exponente de escala para la tasa de disipación de energía</i> 3) <i>Parámetro de estabilidad en las distribuciones de Lévy</i>
$\epsilon_n^{(p)}$	<i>Intensidad de la estructura jerárquica de orden <math>p</math> en el modelo de She-Lévêque y en en log-Poisson</i>
$\gamma$	1) <i>Parámetro en el modelo de difusión asociado al coeficiente drift</i> 2) <i>Parámetro de escala en las distribuciones estables</i>
$\Delta$	<i>Parámetro de intermitencia en el modelo log-Poisson considerando la propiedad ESS</i>
$\vec{\hat{u}}$	<i>Transformada de Fourier de <math>\vec{u}</math></i>
$k_n$	<i><math>n^\circ</math> de onda del <math>n</math>-esimo shell</i>
$f_n$	<i>Forzamiento en el <math>n</math>-esimo shell</i>
$q$	<i>Parámetro del modelo GOY</i>
$E$	<i>Primer invariante del modelo GOY</i>
$H$	<i>Segundo invariante del modelo GOY</i>
$P(u_n, t_n)$	<i>Probabilidad de que la velocidad se encuentre en el estado <math>u_n</math> en el momento <math>t_n</math></i>
$D_1$	<i>Coeficiente drift en el modelo de difusión</i>
$D_2$	<i>Coeficiente difusión en el modelo de difusión</i>
$M_1$	<i>Momento de orden 1 para la velocidad en el modelo de difusión</i>
$M_2$	<i>Momento de orden 2 para la velocidad en el modelo de difusión</i>
$\lambda$	<i>Escala espacial en el modelo de difusión</i>
$\Delta T_{50-0.22}$	<i>Diferencia de temperatura entre los niveles de 50m y 0.22m</i>
$\sigma$	<i>Desviación standard de una distribución de probabilidad</i>
$f(x)$	<i>Función de densidad de probabilidad</i>
$\pi_n$	<i>Tasa de disipación de energía adimensional</i>
$\varphi_x(t)$	<i>Función característica de la variable aleatoria <math>x</math></i>

## Apéndice VII

$\hat{S}_k$	<i>Estimación espectral de orden <math>k</math> por Blackman &amp; Tukey</i>
$c_\tau$	<i>Autocovarianza para un desfase <math>\tau</math></i>
$s(x)$	<i>Función de Cramer</i>

## **Apéndice VIII (Listado de artículos publicados o en revisión)**

- Vindel JM, Yagüe C and Redondo JM (2008a) Relationship between intermittency and stratification, *Nuovo Cimento C. Geophysics and Space Physics* 31 669-678
- Vindel JM, Yagüe C and Redondo JM (2008b) Structure function analysis and intermittency in the atmospheric boundary layer. *Nonlinear Process Geophys* 15 915-929
- Vindel JM and Yagüe C (2009) Application of a GOY model to atmospheric boundary layer data. *Nonlinear Process Geophys* 16 599-606
- Vindel JM and Trincado E (2010) The timing of information transmission in financial markets. *Physica A* 389 5749-5758
- Vindel JM and Yagüe C (2011) Intermittency of turbulence in the atmospheric boundary layer: scaling exponents and stratification influence. *Boundary-Layer Meteorology* 140 73-85
- Trincado E and Vindel JM (2012a) Not fully developed turbulence in the Dow Jones index (*Submitted to Brazilian Journal of Physics*)
- Trincado E and Vindel JM (2012b) Turbulence and utilitarianism in the economic texts (*Submitted to Oeconomia*)

## Relationship between intermittency and stratification

J. M. VINDEL<sup>(1)(\*)</sup>, C. YAGÜE<sup>(2)(\*\*)</sup> and J. M. REDONDO<sup>(3)</sup>

<sup>(1)</sup> *Area de Modelización, Agencia Estatal de Meteorología (AEMET) - Madrid, Spain*

<sup>(2)</sup> *Departamento de Geofísica y Meteorología, Universidad Complutense de Madrid  
Madrid, Spain*

<sup>(3)</sup> *Departamento de Física Aplicada, Universidad Politécnica de Calatunya - Barcelona, Spain*

(ricevuto il 6 Ottobre 2008; approvato il 10 Dicembre 2008; pubblicato online il 9 Aprile 2009)

**Summary.** — A formal analogy exists between 2D turbulence and 3D turbulence with stratification and rotation. Although the effect of the rotation, to the scale typical of the turbulence, is negligible in the atmosphere, we have found a relationship between the behavior of the intermittency and that of the atmospheric stratification. In order to do that, the intermittency has been characterized through the flatness of the PDFs of velocity increments, for the smallest possible scale, present in our measurements.

PACS 47.27.-i – Turbulent flows.

### 1. – Introduction

The deviation that turbulence presents [1, 2] with regard to the theory of Kolmogorov [3] is known as intermittency. This intermittency is associated with the presence of rare events; this is translated in the scale-dependent stretching of the tails presented by the PDFs of the velocity increments, compared to the Gaussian form and its approach by stretched exponentials [4-8].

2D turbulence is a special type of turbulence characterized by the conservation of the vorticity and the absence of intermittency [9, 10]. In conditions of homogeneity and isotropy, 2D turbulence is explained by the theory of Kraichnan [11, 12] according to which a direct cascade of enstrophy exists with a slope of  $-3$ , and other inverse cascade of energy, with a slope of  $-5/3$ .

An index that allows characterizing the form of the PDFs is  $\log(F/3)$  [13], where  $F$  is the corresponding flatness. The number 3 alludes to the value of the Gaussian flatness, so that the larger this index, the bigger the deviation of the PDFs from the Gaussian distribution is found and, therefore, major will be the grade of existing intermittency (an example of the evolution of the flatness with the scale can be seen in [14]).

---

(\*) E-mail: jmvindel@inm.es

(\*\*) E-mail: carlos@fis.ucm.es

# Structure function analysis and intermittency in the atmospheric boundary layer

J. M. Vindel<sup>1</sup>, C. Yagüe<sup>2</sup>, and J. M. Redondo<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Agencia Estatal de Meteorología, Madrid, Spain

<sup>2</sup>Dept. Geofísica y Meteorología, Universidad Complutense de Madrid, Spain

<sup>3</sup>Dept. Física Aplicada, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, Spain

Received: 10 April 2008 – Revised: 31 July 2008 – Accepted: 1 October 2008 – Published: 27 November 2008

**Abstract.** Data from the SABLES98 experimental campaign (Cuxart et al., 2000) have been used in order to study the relationship of the probability distribution of velocity increments (PDFs) to the scale and the degree of stability. This connection is demonstrated by means of the velocity structure functions and the PDFs of the velocity increments.

Using the hypothesis of local similarity, so that the third order structure function scaling exponent is one, the inertial range in the Kolmogorov sense has been identified for different conditions, obtaining the velocity structure function scaling exponents for several orders. The degree of intermittency in the energy cascade is measured through these exponents and compared with the forcing intermittency revealed through the evolution of flatness with scale.

The role of non-homogeneity in the turbulence structure is further analysed using Extended Self Similarity (ESS). A criterion to identify the inertial range and to show the scale independence of the relative exponents is described. Finally, using least-squares fits, the values of some parameters have been obtained which are able to characterize intermittency according to different models.

## 1 Introduction

The single point velocity structure function of order  $p$ , for a certain temporal scale ( $\tau$ ), is defined as:

$$S_p(\tau) = \langle |u(t + \tau) - u(t)|^p \rangle \quad (1)$$

Richardson (1922) assumed the existence of an energy cascade, which was formalized along the so-called inertial range by Kolmogorov (1941, 1962). The spatial and temporal descriptions of the cascade may be exchanged assuming Taylor's "frozen eddy" hypothesis (Stull, 1988), but care is needed in non-homogeneous flows (Mahjoub et al., 1998). Within the inertial range, for homogeneous and isotropic turbulence in local equilibrium, Kolmogorov (1941) established the following relation between the spatial structure functions and length scales ( $l$ ):

$$S_p(l) \sim \langle \varepsilon \rangle^{p/3} l^{p/3} \quad (2)$$

where  $\langle \varepsilon \rangle$  is the mean energy dissipation rate assuming that it does not vary in space or time. This inertial range spreads out from the integral scale (of the order of the scale which generates the perturbation) to the Taylor microscale (of the three standard turbulence length scales, the one for which viscous dissipation begins to affect the eddies) and continues further to smaller scales defined by Kolmogorov (the scale that characterizes the smallest dissipation-scale eddies; Glickman, 2000).

Whether we consider spatial or time dependence, if the conditions of existence of an equilibrium inertial range are satisfied, a potential type relationship is observed between the structure functions of different order,  $p$ , and the scale (e.g. Anselmet et al., 1984, for shear flows):

$$S_p(\tau) \sim \tau^{\zeta_p} \quad (3)$$



Correspondence to: J. M. Vindel  
(jmvindel@inm.es)



# Application of a GOY model to atmospheric boundary layer data

J. M. Vindel<sup>1</sup> and C. Yagüe<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Área de Modelización, Agencia Estatal de Meteorología (AEMET), Madrid, Spain

<sup>2</sup>Dept. de Geofísica y Meteorología, Universidad Complutense de Madrid, Madrid, Spain

Received: 23 April 2009 – Revised: 11 August 2009 – Accepted: 8 September 2009 – Published: 12 October 2009

**Abstract.** This article analyzes the possibility of applying a GOY theoretical model to atmospheric boundary layer data. Bearing this in mind, relative scaling exponents of velocity structure functions are used to compare the model with the data under study. In the model, these exponents are set based on two parameters ( $q$  and  $\delta$ ), which are appropriate to define the model that better features a certain atmospheric state.

From these scaling exponents, the gap between 2-D and 3-D turbulence is observed in the model, depending on the fact that  $\delta$  is higher or lower than unity, respectively.

Atmospheric data corresponding to very different states of stratification stability have been analyzed. For convective or near-neutral situations (usually associated to 3-D turbulence), it is possible to find parameters  $q$  and  $\delta$  to define a model that fits the measured data. More stable situations can be featured by GOY models with higher values of  $\delta$ . However, it is clear that it is impossible to represent nocturnal situations of strong stable stratification (with a more similar behaviour to 2-D) with this type of model.

## 1 Introduction

The velocity structure function of order  $p$ ,  $S_p$ , can be defined (for a temporal scale  $\tau$ ) as:

$$S_p(\tau) = \frac{\langle |u(t+\tau) - u(t)|^p \rangle}{\langle |u(t)|^p \rangle} \quad (1)$$

In the inertial range, there is a power relation between these structure functions and the scale, that is to say,  $S_p \propto \tau^{-\zeta_p}$ , where the coefficients  $\zeta_p$  are the so-called absolute scaling exponents.

According to Kolmogorov theory K41 (Kolmogorov, 1941), in conditions of homogeneity and isotropy, the scaling exponents,  $\zeta_p$ , have a linear dependence with regard to  $p$  order ( $\zeta_p = p/3$ ).

In the inertial range there is also a power relationship between any order structure function ( $S_p$ ) and order 3 structure function,  $S_3$  (ESS – Extended Self Similarity – method, Benzi et al., 1993). The exponents of this relationship,  $\bar{\zeta}_p$ , are called relative exponents, and its connection with  $\zeta_p$  is:

$$\bar{\zeta}_p = \zeta_p / \zeta_3 \quad (2)$$

There are several turbulence models (Frisch, 1995) which express the scaling exponent values according to one or several parameters. Shell models constitute an especially important group of models. These models consist of a set of equations obtained from the Navier-Stokes equations in Fourier space. For our study, from the many existing shell models, we select the GOY model, a more recent version of the Gledzer model (Gledzer, 1973) conceived by Yamada and Ohkitani (1987). An update information on shell models and in particular on GOY model can be found in Ditlevsen (2004).

This model uses a set of ordinary differential equations, each of them representative of a shell in which the Fourier space is divided, showing the following general form (the  $n$  sub-index refers to the  $n$ -th shell):

$$\left( \frac{d}{dt} + \nu k_n^2 \right) u_n = i(a_n u_{n+1} u_{n+2} + b_n u_{n-1} u_{n+1} + c_n u_{n-1} u_{n-2})^* + f_n \quad (3)$$

where  $\nu$  represents kinematic viscosity,  $u_n$  velocity in the  $n$ -th shell ( $u_n = 0$  for  $n \leq 0$ ),  $k_n$  the corresponding wave number (scale geometrically assumed, that is to say,  $k_n = k_0 q^n$ ) and  $f_n$ , a forcing term (if it is, for example, in the fourth mode,  $f_n = f \delta_{4,n}$ ).

With regard to the other coefficients,

$$a_n = a k_n = a k_0 q^n \quad b_n = b k_{n-1} = b k_0 q^{n-1} \quad c_n = c k_{n-2} = c k_0 q^{n-2} \quad (4)$$

So, the six parameters that define these models are:  $k_0$ ,  $q$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , and  $f$ .

Usual values considered for some of those parameters (Kadanoff et al., 1995) are the following:

$$k_0 = 1/16; \quad a = 1; \quad q = 2; \quad f = 5(1+i)10^{-3} \quad (5)$$



Correspondence to: J. M. Vindel  
 (jmvindel@inm.es)



# The timing of information transmission in financial markets

Jose M. Vindel<sup>a</sup>, Estrella Trincado<sup>b,\*</sup>

<sup>a</sup> Facultad de CC. Físicas, Universidad Complutense de Madrid, Spain

<sup>b</sup> Facultad de CC. Económicas y Empresariales, Universidad Complutense de Madrid, Spain

## ARTICLE INFO

### Article history:

Received 4 May 2010

Received in revised form 6 August 2010

Available online 20 September 2010

### Keywords:

Information cascade

Financial markets

Dissipation rate

Transfer rate

Eddies' size

## ABSTRACT

This article shows turbulent behavior in a series of financial indexes assuming that they follow a cascade process of the same type as do turbulent fluids. With such a model, the energy flux between the eddies that emerge in the fluid is analogous to the financial information flux over the course of time. The results obtained confirm the variability of variation of the indexes for the considered time scale (the turbulent intermittency typical for fluids), and they also confirm that when we descend along the cascade, that is to say, when we consider smaller time intervals, the rate at which the hypothetical eddies of information dissipate becomes greater than the rate at which the information is transmitted. This fact can explain the cyclical nature of crises: ultimately, financial events have a memory of the past. Besides, the NASDAQ singular behavior regarding the number of jumps, the degree of intermittency of the turbulence and the life time of the hypothetical eddies has been analysed.

© 2010 Elsevier B.V. All rights reserved.

## 1. Introduction

In studying fluid dynamics various parameters are used which attempt to reflect the degree of turbulence. Probably the most well known of these parameters is the Reynolds number ( $Re$ ) [1], which is defined as:

$$Re = \frac{ul}{\nu}. \quad (1)$$

Here  $u$  is the fluid velocity,  $l$  is a length typical of the phenomenon (in the atmosphere, for example, it corresponds with height) and  $\nu$  is the viscosity of the fluid.

The Reynolds number is a dimensionless constant that measures the relationship between the viscous terms of the Navier–Stokes equations [2,3] and the inertial or non-linear terms. It is used to characterize the fluid regime; by its definition, when viscous forces have a dominant effect in the energy loss, the Reynolds number is small and the flow is in a laminar regime. A large Reynolds number reflects that the viscous forces have a small influence on the energy loss and, so, that the flow is turbulent.

The turbulent movement of a flow is characterized by the existence of a collection of eddies of different sizes. The biggest eddies, with a size of the order of the scale typical of the mean flow, interact with the mean flow and draw energy from it. These eddies have a large Reynolds number, and so they turn out to be unstable and tend to break up giving rise to other minor eddies to which they transfer energy. However, in this process of birth and death, not all the energy of the generating eddies is transferred to the offspring eddies, as a small part of the energy dissipates as heat due to the viscous stresses in the fluid. The new eddies created, with a high Reynolds number, are also unstable, so they too undergo the previous process giving birth to new eddies at the expense of the old ones, losing once again energy in the process because of viscosity.

\* Corresponding author.

E-mail address: [estrinaz@ccee.ucm.es](mailto:estrinaz@ccee.ucm.es) (E. Trincado).

# Intermittency of Turbulence in the Atmospheric Boundary Layer: Scaling Exponents and Stratification Influence

J. M. Vindel · C. Yagüe

Received: 6 December 2009 / Accepted: 1 February 2011 / Published online: 10 March 2011  
© Springer Science+Business Media B.V. 2011

**Abstract** We show the relationship between the intermittency of turbulence and the type of stratification for different atmospheric situations during the SABLES98 field campaign. With this objective, we first demonstrate the scaling behaviour of the velocity structure functions corresponding to these situations; next, we analyze the curvature of the scaling exponents of the velocity structure functions versus the order of these functions ( $\zeta_p$  vs.  $p$ ), where  $\zeta_p$  are the exponents of the power relation for the velocity structure function with respect to the scale. It can be proved that this curve must be concave, under the assumption that the incompressible approximation does not break down at high Reynolds numbers. The physical significance of this kind of curvature is that the energy dissipation rate increases as the scale of the turbulent eddies diminishes (intermittency in the usual sense). However, the constraints imposed by stability, preventing full development of the turbulence, allow the function  $\zeta_p$  versus  $p$  to show any type of curvature. In this case, waves of high frequency trapped by the stability, or bursts of turbulence caused by the breaking up of internal waves, may produce a redistribution of energy throughout the scaling range. Due to this redistribution, the variation with the scale of the energy dissipation rate may be smaller (decreasing the intermittency) and, even in more stable situations, this rate may diminish (instead of increasing) as the scale diminishes (convex form of the curve  $\zeta_p$  vs.  $p$ ).

**Keywords** Intermittency of turbulence · Scaling exponents · Stratification

## 1 Introduction

In the so-called energy cascade (Richardson 1922), the largest eddies in the atmosphere are due to thermal convection and to the mean shear of the flow (Arya 1999). These eddies

---

J. M. Vindel (✉)

Área de Modelización, Agencia Estatal de Meteorología (AEMET), Madrid, Spain  
e-mail: jmvindel@hotmail.com

C. Yagüe

Dpto. Geofísica y Meteorología, Universidad Complutense de Madrid, Madrid, Spain  
e-mail: carlos@fis.ucm.es